REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

APRILIE 2014

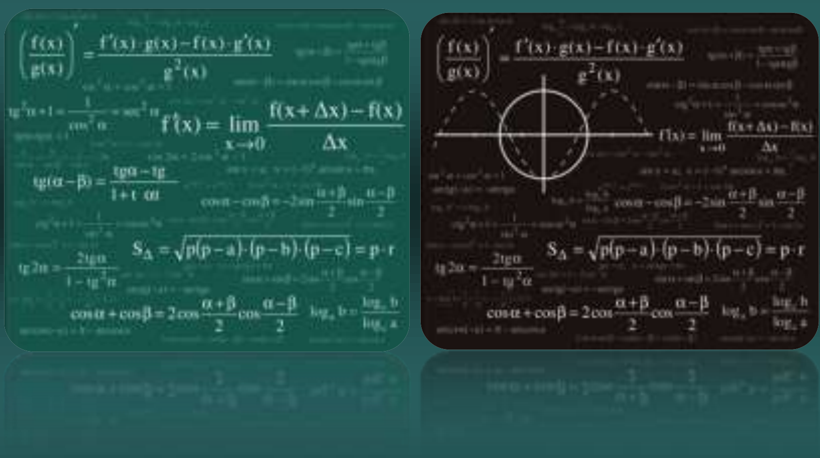
REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

DE PESTE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro



Articole :

1.Other solution to Problem 5284 from School Science and Mathematics Journal

By Roxana Mihaela Stanciu, Buzău, Romania and Nela Ciceu, Roșiori, Bacău, Romania

- **5284:** *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA*

  Prove:

  a) $3^{3^n}+1\equiv 0 \bmod 28,\ \forall n\geq 1,$

  b) $3^{3^n}+1\equiv 0 \bmod 532,\ \forall n\geq 2,$

  c) $3^{3^n}+1\equiv 0 \bmod 19684,\ \forall n\geq 3,$

  d) $3^{3^n}+1\equiv 0 \bmod 3208492,\ \forall n\geq 4.$

Solution:

We use the fact that
(*) If a is a positive integer and t is odd number, then $a+1$ divide a^t+1.

a) By (*) $3^3+1=28$ divide

$$3^{3^n}+1=(3^3)^{3^{n-1}}+1.$$

b) and c) Yields by (*) because

$$3^9+1=19684, 19684=532\times 37 \text{ and}$$

$$3^{3^n}+1=(3^9)^{3^{n-2}}+1.$$

d) By (*) we have that

$$3^{3^n}+1=(3^{81})^{3^{n-4}}+1$$

is divisible by $3^{81}+1$.
Since

$$3^{81}+1=(3^{27}+1)(3^{54}-3^{27}+1)=(3^9+1)(3^{18}-3^9+1)(3^{54}-3^{27}+1)$$

and $3208492=19684\times 163$, so using c) yields it suffices to prove that

$$3^{54}-3^{27}+1 \text{ is divisible by } 163.$$

In the next we working modulo 163 and we have:
(1) $3^{27}=(3^8)^3\times 3^3=6561^3\times 3^3=(40\times 163+41)^3\times 3^3=41^3\times 3^3=41\times 27\times 1681=$
$=41\times 27\times(1630+51)=41\times 27\times 51=56457=346\times 163+59=59(\text{mod}163)$.

(2) $3^{54}=59^2 3481=21\times 163+58=58(\text{mod}163)$.

From (1) and (2) yields that

$$3^{54} - 3^{27} + 1 = 58 - 59 + 1 = 0 (\text{mod}\, 163), \text{ and we are done.}$$

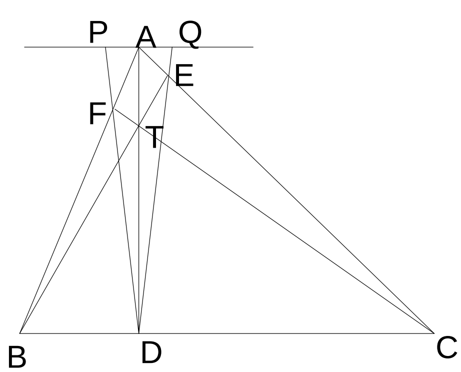
2.Other solution to Problem 439 from Mathematical Excalibur

By Nela Ciceu, Roșiori, Bacău and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

Problem 439. In acute triangle ABC, T is a point on the altitude AD (with D on side BC). Lines BT and AC intersect at E, lines CT and AB intersect at F, lines EF and AD intersect at G. A line ℓ passing through G intersects side AB, side AC, line BT, line CT at M, N, P, Q respectively.

Prove that $\angle MDQ = \angle NDP$.

Solution:
We use the following
Lemma. Let ABC be a triangle and the altitude AD with D on the side BC. Let T be a point on AD. If BT intersect AC in point E and CT intersect AB in point F, then AD is the bisector of $\angle EDF$.
Proof.



We construct the parallel through A at BC; DE and DF intersect this parallel at points Q respectively P. We have

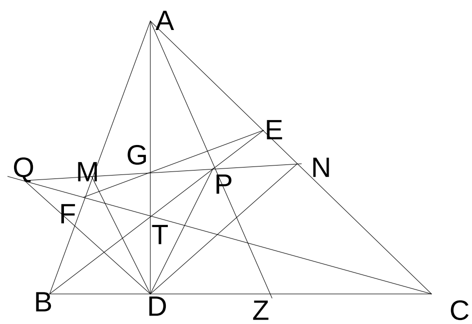
$$\frac{AQ}{DC}=\frac{AE}{EC} \text{ and}$$
$$\frac{AP}{BD}=\frac{AF}{FB}.$$

By Ceva's theorem we have

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{DC}{AQ}\cdot\frac{AP}{BD}=1,$$

so $AP=AQ$.

In triangle PDQ, AD is altitude and median, i.e. AD is also bisector.



We denote a,b,c the sides of triangle ABC, Z the intersect of AP with BC,

$$t=\frac{AT}{TD}, y=\frac{AM}{MB}, z=\frac{AP}{PZ}.$$

With Menelaus theorem in triangle ADC with the transversal $B-T-E$ we obtain

$$\frac{BD}{BC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{TA}{TD}=1,$$

So

$$\frac{EA}{EC}=\frac{tBD}{a}$$

and similar

$$\frac{FA}{FB}=\frac{tDC}{a}.$$

Using the relation (R_2) from Recreaţii Matematice (see the link http://recreatiimatematice.ro/arhiva/articole/RM12005ZI.pdf) we obtain

$$\frac{AG}{GD}=\frac{a\cdot\frac{tDC}{a}\cdot\frac{tBD}{a}}{\frac{tDC}{a}\cdot BD+\frac{tBD}{a}\cdot DC}\Rightarrow\frac{AG}{GD}=\frac{t}{2}.$$

Applying Menelaus theorem in triangle ADZ and transversal $B-T-P$ we have

$$\frac{BD}{BZ}\cdot\frac{PZ}{PA}\cdot\frac{TA}{TD}=1\Rightarrow tBD=zBZ\Rightarrow DZ=\frac{BD(z-t)}{z}, BZ=\frac{tBD}{z}.$$

Using again the relation (R_2) in triangle ABZ, with the cevian AD and the secant $M-G-P$ we obtain

$$\frac{t}{2}=\frac{yzBZ}{yBD+zDZ}\Leftrightarrow\frac{t}{2}=\frac{tyBD}{yBD+(z-t)BD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{y}{y+z-t}\Leftrightarrow z=t+y.$$

Hence

$$\frac{ZD}{ZB}\cdot\frac{MB}{MA}\cdot\frac{TA}{TD}=\frac{z-t}{t}\cdot\frac{1}{y}\cdot t=1$$

and, by converse Menelaus theorem we obtain that the points M,T,Z are collinear.
By lemma we have $\angle MDG=PDG$. Similar we obtain that $\angle QDG=NDG$, wherefrom yields the desired conclusion $\angle MDQ=\angle NDP$.

3. Derivata unui determinant

CIOBÎCĂ CONSTANTIN
COLEGIUL VASILE LOVINESCU FĂLTICENI

Lucrarea se adresează elevilor de liceu , profesorilor de matematică (temă pentru cercurile de matematică),prezentând derivata unui determinant şi aplicaţiile ei în analiza matematică.

Fie $a_{ij}:R\to R$ funcţii derivabile pe R, iar $a:R\to R$,

$$a(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots\ldots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots\ldots & a_{2n}(x)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}(xs) & a_{n2}(x) & \ldots\ldots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

atunci $a(x)$ este o funcţie derivabilă pe R şi

$$a(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots\ldots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots\ldots & a_{2n}(x)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ a'_{j1}(x) & a'_{j2}(x) & \ldots\ldots\ldots & a'_{jn}(x)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}(xs) & a_{n2}(x) & \ldots\ldots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

Demonstraţie:

$a_{ji}(x),\ i, j \in \{1,2,\dots,n\}$ sunt funcţii derivabile, atunci şi $a(x)$ este derivabilă ca o combinaţie de funcţii $a_{ji}(x),\ i, j \in \{1,2,\dots,n\}$.

$$a(x) = \sum_{\sigma \in P_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},\ \forall x \in R$$

$$a(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in P_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a'_{j\sigma(j)}(x) \dots a_{n\sigma(n)},\ \forall x \in R$$

Exerciţii aplicative

1. Să se demonstreze că :

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$\forall x \in R, \quad \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in R$

Rezolvare:

Considerăm funcţia $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Această funcţie este o funcţie derivabilă, a cărei derivată este:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cum $f'(x) = 0$, rezultă că funcţia f este o funcţie constantă pe mulţimea numerelor reale şi : $f(x) = f(0), \forall x \in R$.

$$f(0) = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}, \forall \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in R$$

Rezultă că:

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$\forall x \in R, \quad \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in R$

2. Să se arate că $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ are ca rădăcină pe 1 şi aceasta este o rădăcină multiplă de ordin de multiplicitate 3.

Rezolvare:

Ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină multiplă de ordin de multiplicitate 3 dacă: $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$.

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$f'(x)=\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ 2x & 2x+2 & 2 & 0\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$f'(1)=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$f''(x)=\begin{vmatrix}6x & 6 & 0 & 0\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ 2x & 2x+2 & 2 & 0\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ 2x & 2x+2 & 2 & 0\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ x & 2x+1 & x+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ 2x & 2x+2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 3\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}3x^2 & 6x & 3 & 0\\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 3x^2 & 3x & 1\\ 2x & 2x+2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$f''(1)=0$$

BIBLIOGRAFIE

1) ANCA PRECUPANU- Bazele analizei matematice. Editura Universităţii „ AL. I. CUZA”, IAŞI.

4.APLICAŢII ALE FORMULEI LUI TAYLOR

Ciobîcă Constantin.
Colegiul Vasile Lovinescu Fălticeni

Calcularea sumelor de forma: $S_n^k = 1^k + 2^k + ... + n^k, k = \overline{1,3}$.
Pentru a calcula aceste sume, vom determina mai întâi „FORMULA LUI TAYLOR” pentru polinoame. Fie polinomul $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, pe care îl dezvoltăm după puterile binomului $x - a$.

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + ... + A_n(x-a)^n$$

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + ... + nA_n(x-a)^{n-1} \Rightarrow P'(a) = A_1$$

$$P''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-a) + ... + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \Rightarrow P''(a) = 2A_2$$

$$A_1 = \frac{P'(a)}{1!},\ A_2 = \frac{P''(a)}{2!}, ..., A_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, ..., A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$x = a + h, \Rightarrow P(a+h) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n$ - cunoscută sub denumirea de formula lui TAYLOR.

a) Demonstrăm $S_n^1 = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.Determinăm polinoamele de forma $P(x) = ax^2 + bx$ care îndeplinesc condiţia (1) $P(x+1) - P(x) = x$. Din formula lui Taylor rezultă că $P(x+1) - P(x) = \frac{P'(x)}{1!} + \frac{P''(x)}{2!}$

$$\begin{aligned} &P'(x) = 2ax + b \quad \Rightarrow P(x+1) - P(x) = 2ax + b + a = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &P''(x) = 2a \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Dăm lui x valorile 1,2,………..,n în (1) şi obţinem : $P(2) - P(1) = 1$

$$P(3) - P(2) = 2$$

....

$$P(n+1) - P(n) = n$$

------------------------------------+

(2) $P(n+1) - P(1) = 1 + 2 + ... + n$

(3). $P(1)=0$, $P(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)n$. Din (2) şi (3) rezultă :

$S_n^1 = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Demonstrăm $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.Determinăm polinoamele de forma $P(x)=ax^3+bx^2+cx$ care îndeplinesc condiţia (1) $P(x+1)-P(x)=x^2$. Din formula lui Taylor $P(x+1)-P(x)=\frac{P'(x)}{1!}+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P'''(x)}{3!}$.

$$P'(x)=3ax^2+2bx+c\,,\ P''(x)=6ax+2b\,,\ P'''(x)=6a \qquad \Rightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ 2b+3a=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{3a}{2}=-\frac{1}{2} \\ c=-b-a=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{6}x(2x^2-3x+1)=\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$$

Dăm lui x valorile 1,2,……….,n şi obţinem : :

$$P(2)-P(1)=1^2$$
$$P(3)-P(2)=2^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(n+1)-P(n)=n^2$$
-------------------------------------+

$$P(n+1)-P(1)=1^2+2^2+.....+n^2 \qquad (4)$$

(5). $P(1)=0$, $P(n+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)n$. Din (4) şi (5) rezultă :

$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Demonstrăm $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Determinăm polinoamele de forma $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$ care îndeplineşte condiţia (1) şi deci :

$$P(x+1)-P(x)=\frac{P'(x)}{1!}+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P'''(x)}{3!}+\frac{P^{(4)}(x)}{4!}$$

$$P'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d\,,\ P''(x)=12ax^2+6bx+2c\,,\ P'''(x)=24ax+6b,\ P^{(4)}(x)=24a$$

$$\begin{cases} 4a=1 \\ 3b+6a=0 \\ 2c+3b+4a=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-2a=\frac{-1}{2} \\ c=\frac{-3b-4a}{2}=\frac{1}{4} \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}[x(x-1)]$$

Dăm lui x valorile 1,2,…….,n şi obţinem :

$$P(2)-P(1)=1^3$$
$$P(3)-P(2)=2^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(n+1)-P(n)=n^3$$

------------------------------------+

(6) $\quad P(n+1)-P(1)=1^3+2^3+.....+n^3$

(7). $P(1)=0$, $P(n+1)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Din (6) şi (7) rezultă :

$$S_n^3=1^3+2^3+.......+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Prof Ciobîcă Constantin

5. ŞIRURI DE ARII DE SUPRAFEŢE PARALELOGRAMICE

Prof. Văcărean Sorina, Colegiul Naţional „George Bariţiu”, Cluj-Napoca

$\boxed{1.}$ Se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC)$, $C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$ astfel încât $\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{CD} = \frac{DD_1}{DA} = \frac{1}{k}$, $A_2 \in (A_1B_1)$, $B_2 \in (B_1C_1)$, $C_2 \in (C_1D_1)$, $D_2 \in (D_1A_1)$ astfel încât $\frac{A_1A_2}{A_1B_1} = \frac{B_1B_2}{B_1C_1} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1} = \frac{D_1D_2}{D_1A_1} = \frac{1}{k}$, $A_3 \in (A_2B_2)$, $B_3 \in (B_2C_2)$, $C_3 \in (C_2D_2)$, $D_3 \in (D_2A_2)$ astfel încât $\frac{A_2A_3}{A_2B_2} = \frac{B_2B_3}{B_2C_2} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2} = \frac{D_2D_3}{D_2A_2} = \frac{1}{k}$, …, $A_n \in (A_{n-1}B_{n-1})$, $B_n \in (B_{n-1}C_{n-1})$, $C_n \in (C_{n-1}D_{n-1})$, $D_n \in (D_{n-1}A_{n-1})$ astfel încât $\frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \frac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}C_{n-1}} = \frac{C_{n-1}C_n}{C_{n-1}D_{n-1}} = \frac{D_{n-1}D_n}{D_{n-1}A_{n-1}} = \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, unde $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$ şi $D_0 = D$. Se notează cu s_i aria suprafeţei patrulaterului $A_iB_iC_iD_i$, $i \in \mathbb{N}$, exprimată în u^2.

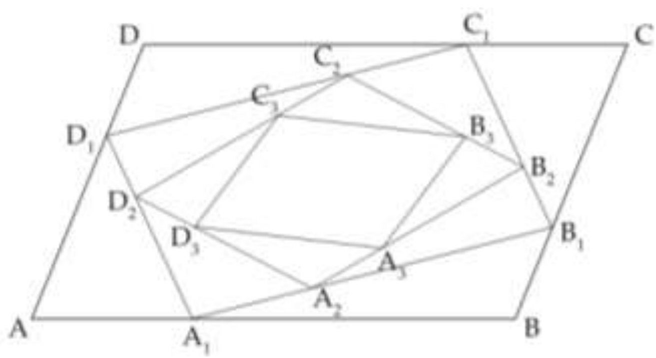
a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Calculaţi $\sum\limits_{i=0}^{n} s_i$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Arătaţi că $s_n^{\ 2} = s_{n-1} \cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram şi că

$$A_{\triangle D_1AA_1} = A_{A_1BB_1} = A_{\triangle B_1CC_1} = A_{\triangle C_1DD_1} = \frac{k-1}{2k^2} AB \cdot AD \cdot \sin A = \frac{k-1}{2k^2} A_{ABCD} = \frac{k-1}{2k^2} s_0 .$$

$s_1 = \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1} = \mathcal{A}_{ABCD} - 4\mathcal{A}_{\vartriangle A_1BB_1} = s_0 - 4\cdot\dfrac{k-1}{2k^2}s_0 = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}s_0$.

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$ este paralelogram şi

$\mathcal{A}_{A_2B_2C_2D_2} = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}$, adică $s_2 = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}s_1$, de unde $s_2 = \left(\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^2 s_0$.

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_3B_3C_3D_3$ este paralelogram şi

$\mathcal{A}_{A_3B_3C_3D_3} = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\mathcal{A}_{A_2B_2C_2D_2}$, adică $s_3 = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}s_2$, de unde $s_3 = \left(\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^3 s_0$.

iv) Deducem formula pentru s_n, unde $s_n = \mathcal{A}_{A_nB_nC_nD_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}$, este paralelogram şi

(1) $s_n = \left(\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^n s_0$, $n\in\mathbb{N}$, propoziţie care se demonstrează prin inducţie matematică.

La propoziţia (1) se poate ajunge şi utilizând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(2) $s_n = \dfrac{k^2-2k+2}{k^2}s_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $s_0>0$, caz în care nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^n s_0 = 0\cdot s_0 = 0$, întrucât $\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}<1$, $\forall k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

c) Notăm $\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}=t$.

$$\sum_{i=0}^{n} s_i = s_0+s_1+s_2+\dots+s_n = s_0+ts_0+t^2s_0+\dots+t^ns_0 = \left(1+t+t^2+\dots+t^n\right)s_0 = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}s_0 =$$

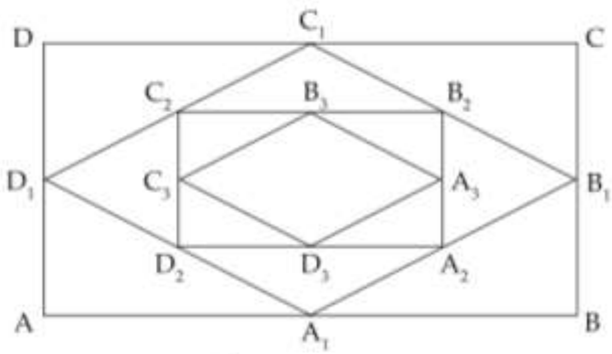
$$= \frac{1-\left(\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{k^2-2k+2}{k^2}}s_0 = \frac{k^2}{2(k-1)}\left[1-\left(\frac{k^2-2k+2}{k^2}\right)^{n+1}\right]s_0.$$

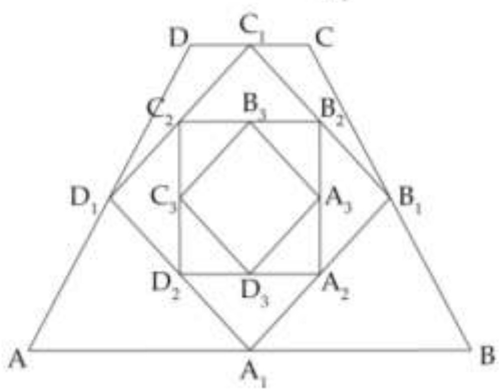
d) Aplicând formula de recurenţă (2) ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$s_{n+1}\cdot s_{n-1} = ts_n\cdot s_{n-1} = ts_{n-1}\cdot s_n = s_n\cdot s_n = {s_n}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

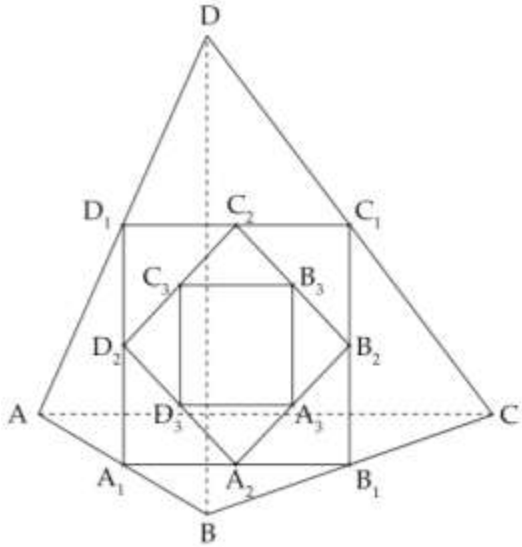
Observaţii:

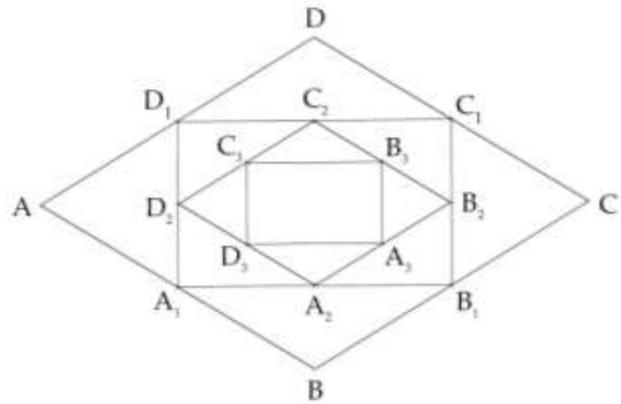
1. În ipoteza că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi sau trapez isoscel şi $k=2$, patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt dreptunghiuri, dacă n este par, sau romburi, dacă n este impar şi toate rezultatele se păstrează.



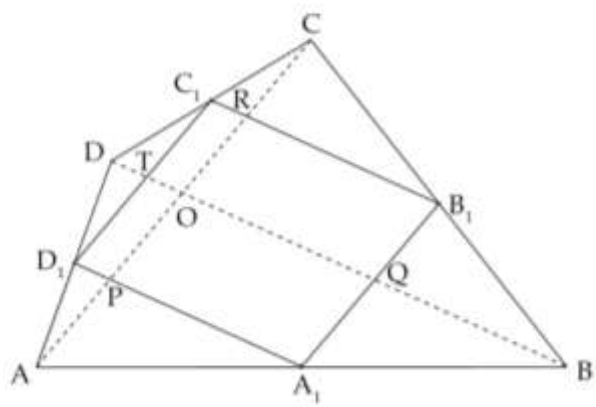


2. În ipoteza că patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal (în particular romb) şi $k=2$, patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt romburi, dacă n este par, sau dreptunghiuri, dacă n este impar şi toate rezultatele se păstrează.





3. În ipoteza că $ABCD$ este un patrulater oarecare şi $k=2$, patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt paralelograme şi toate rezultatele se păstrează.

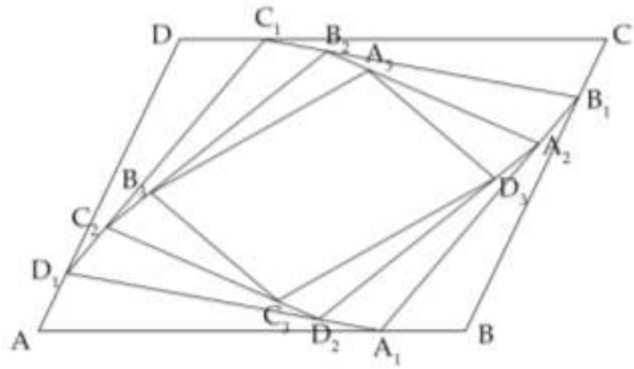


Se utilizează formula ariei suprafeţei patrulaterului $ABCD$ în funcţie de lungimile diagonalelor şi de sinusul unghiului determinat de acestea:

$A_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD\cdot\sin\left(\sphericalangle AOD\right)}{2}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$.

$\boxed{2.}$ Acelaşi text ca la problema 1, în ipoteza că valoarea comună a tuturor şirurilor de rapoarte egale este $\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a<b$.

Rezolvare:



a) i) Calculăm s_1 în funcţie de s_0.

Se arată că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram şi că

$$A_{\triangle D_1AA_1} = A_{A_1BB_1} = A_{\triangle B_1CC_1} = A_{\triangle C_1DD_1} = \frac{a(b-a)}{2b^2}s_0.$$

$$s_1 = A_{A_1B_1C_1D_1} = A_{ABCD} - 4A_{\triangle A_1BB_1} = s_0 - 4\cdot\frac{a(b-a)}{2b^2}s_0 = \frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}s_0.$$

ii) Calculăm s_2 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$ este paralelogram şi

$$s_2 = \frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}s_1 = \left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^2 s_0.$$

iii) Calculăm s_3 în funcţie de s_0.

Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_3B_3C_3D_3$ este paralelogram şi

$$s_3 = \frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}s_2 = \left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^3 s_0$$

iv) Deducem formula pentru s_n, unde $s_n = A_{A_nB_nC_nD_n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Urmând raţionamentul de la i), patrulaterul $A_nB_nC_nD_n$, $n\in\mathbb{N}$, este paralelogram şi

(3) $s_n = \left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^n s_0$, $n\in\mathbb{N}$, propoziţie care se demonstrează prin inducţie matematică.

La propoziţia (3) se poate ajunge şi utilizând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(4) $s_n = \frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}s_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $s_0>0$, caz în care nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^n s_0 = 0$, întrucât $\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{b^2} < 1$, $\forall a,b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$.

c) Notăm $\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{b^2} = y$.

$$\sum_{i=0}^{n} s_i = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s_0 + ys_0 + y^2 s_0 + \ldots + y^n s_0 = \left(1+y+y^2+\ldots+y^n\right)s_0 = \frac{1-y^{n+1}}{1-y}s_0 =$$

$$= \frac{1-\left(\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}} s_0 = \frac{b^2}{2a(b-a)}\left[1-\left(\frac{2a^2-2ab+b^2}{b^2}\right)^{n+1}\right]s_0 .$$

d) Aplicând formula de recurenţă (4) ce caracterizează şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$s_{n+1}\cdot s_{n-1} = ys_n \cdot s_{n-1} = ys_{n-1}\cdot s_n = s_n \cdot s_n = s_n^{\,2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

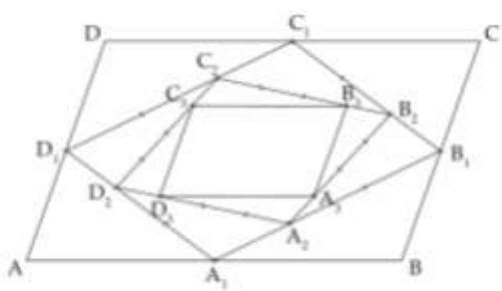
$\boxed{3.}$ Se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC)$, $C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$ astfel încât $\dfrac{AA_1}{AB} = \dfrac{BB_1}{BC} = \dfrac{CC_1}{CD} = \dfrac{DD_1}{DA} = \dfrac{1}{2}$, $A_2 \in (A_1B_1)$, $B_2 \in (B_1C_1)$, $C_2 \in (C_1D_1)$, $D_2 \in (D_1A_1)$ astfel încât $\dfrac{A_1A_2}{A_1B_1} = \dfrac{B_1B_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_1C_2}{C_1D_1} = \dfrac{D_1D_2}{D_1A_1} = \dfrac{1}{3}$, $A_3 \in (A_2B_2)$, $B_3 \in (B_2C_2)$, $C_3 \in (C_2D_2)$, $D_3 \in (D_2A_2)$ astfel încât $\dfrac{A_2A_3}{A_2B_2} = \dfrac{B_2B_3}{B_2C_2} = \dfrac{C_2C_3}{C_2D_2} = \dfrac{D_2D_3}{D_2A_2} = \dfrac{1}{4}$, …, $A_n \in (A_{n-1}B_{n-1})$, $B_n \in (B_{n-1}C_{n-1})$, $C_n \in (C_{n-1}D_{n-1})$, $D_n \in (D_{n-1}A_{n-1})$ astfel încât $\dfrac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}B_{n-1}} = \dfrac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}C_{n-1}} = \dfrac{C_{n-1}C_n}{C_{n-1}D_{n-1}} = \dfrac{D_{n-1}D_n}{D_{n-1}A_{n-1}} = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$ şi $D_0 = D$. Se notează cu s_j aria suprafeţei patrulaterului $A_jB_jC_jD_j$, $j \in \mathbb{N}$, exprimată în u^2.

a) Calculaţi s_n în funcţie de s_0, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Arătaţi că $s_n^{\,2} < s_{n-1}\cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:



a) Se demonstrează că patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$, $n \in \mathbb{N}$, sunt paralelograme.
Utilizăm formula (2) găsită la problema 1 a):

$$s_i = \frac{k^2 - 2k + 2}{k^2} s_{i-1},\ i \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ s_0 > 0.$$

Pentru $i = 1$ şi $k = 2$, $s_1 = \frac{1}{2} s_0$.

Pentru $i = 2$ şi $k = 3$, $s_2 = \frac{5}{9} s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} s_0$.

Pentru $i = 3$ şi $k = 4$, $s_3 = \frac{5}{8} s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} s_0$.

Pentru $i = 4$ şi $k = 5$, $s_4 = \frac{17}{25} s_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{17}{25} s_0$.

Pentru $i = n$ şi $k = n+1$, $s_n = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1) + 2}{(n+1)^2} s_{n-1} =$

$$= \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{17}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_0,$$ de unde: $s_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+1}{(i+1)^2} \right) s_0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Din $\frac{i^2+1}{(i+1)^2} \le \frac{i}{i+1}$ şi din faptul că $\frac{i^2+1}{(i+1)^2} > 0$, $\frac{i}{i+1} > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+1}{(i+1)^2} \le \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$. Cum $\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, urmează că $\prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+1}{(i+1)^2} \le \frac{1}{n+1}$, de unde $\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+1}{(i+1)^2} \right) s_0 \le \frac{1}{n+1} s_0$, întrucât $s_0 > 0$. Avem aşadar $s_n \le \frac{1}{n+1} s_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are termenii strict pozitivi şi $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} s_0 = 0$, rezultă, pe baza criteriului majorării, că $\lim_{n \to \infty} s_n = 0$.

c) Cum $s_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{(n+2)^2} s_n$, de unde

$$s_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{(n+2)^2} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$s_n^{\ 2} < s_{n-1} \cdot s_{n+1} \Leftrightarrow \left[\frac{n^2+1}{(n+1)^2} \right]^2 s_{n-1}^{\ 2} < s_{n-1} \cdot \frac{n^2+2n+2}{(n+2)^2} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2} s_{n-1}.$$

Împărţim cu $\frac{n^2+1}{(n+1)^2}s_{n-1}{}^2$, $\frac{n^2+1}{(n+1)^2}s_{n-1}{}^2>0$, astfel că inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{n^2+1}{(n+1)^2}<\frac{n^2+2n+2}{(n+2)^2}\Leftrightarrow\left(n^2+1\right)\left(n^2+4n+4\right)<\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2+2n+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^4+4n^3+5n^2+4n+4<n^4+4n^3+7n^2+6n+2\Leftrightarrow 2n^2+2n-2>0\Leftrightarrow n^2+n-1>0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\infty\right)\cap\mathbb{N}^*\Leftrightarrow n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce este adevărat.

6. Regarding the math problem J211 from Mathematical Reflections Journal no 6/2011

Marin Chirciu –
Professor at The National College "Zinca Golescu", Pitesti

"Mathematical Reflections" Journal no 6/2011 has suggested the following inequality:

If a, b, c are positive real numbers so that $a^3+b^3+c^3=1$, prove that:

$$\frac{1}{a^5\left(b^2+c^2\right)^2}+\frac{1}{b^5\left(c^2+a^2\right)^2}+\frac{1}{c^5\left(a^2+b^2\right)^2}\geq\frac{81}{4}.$$

Suggested by Titu Zvonaru, Comanesti, Romania.

The article aims to prove expand the math problem from above.

If a, b, c are positive real numbers so that $a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}=1$, n$\in N$,demonstrate that:

$$\frac{1}{a^{n+3}\left(b^n+c^n\right)^2}+\frac{1}{b^{n+3}\left(c^n+a^n\right)^2}+\frac{1}{c^{n+3}\left(a^n+b^n\right)^2}\geq\frac{81}{4}$$

Solution:

Noting with *LHS*and *RHS*the left and right part of theinequality to prove, we obtain:

LHS=

$$\sum\frac{1}{a^{n+3}\left(b^n+c^n\right)^2}=\sum\frac{\left(\frac{1}{a\left(b^n+c^n\right)}\right)^2}{a^{n+1}}\geq\frac{\left(\sum\frac{1}{a\left(b^n+c^n\right)}\right)^2}{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}=\left(\sum\frac{1}{a\left(b^n+c^n\right)}\right)^2\geq\frac{81}{4}=RHS,$$

where the last inequality $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{a\left(b^n+c^n\right)} \ge \frac{9}{2}$, which is true from (CS):

$$\sum \frac{1}{a\left(b^n+c^n\right)} = \sum \frac{1^2}{a\left(b^n+c^n\right)} \ge \frac{(1+1+1)^2}{\sum a\left(b^n+c^n\right)} = \frac{9}{\sum a\left(b^n+c^n\right)} \ge \frac{9}{2},$$

where the last inequality $\Leftrightarrow$

$$2 \ge \sum a\left(b^n+c^n\right) \Leftrightarrow 2\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right) \ge \sum a\left(b^n+c^n\right) \Leftrightarrow \sum\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right) \ge \sum\left(ab^n+ba^n\right),$$

which results from:

$a^{n+1}+b^{n+1} \ge ab^n+ba^n \Leftrightarrow a\left(a^n-b^n\right)-b\left(a^n-b^n\right) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^n-b^n\right) \ge 0$ obvious because the factors $(a-b)$ and $\left(a^n-b^n\right)$ have the same sign for n$\in N^*$ and we have an equality for n=0.

<u>*Observation:*</u>

(CS) is the inequality Cauchy-Schwarz: $\frac{A^2}{X}+\frac{B^2}{Y}+\frac{C^2}{Z} \ge \frac{(A+B+C)^2}{X+Y+Z}$, where A, B, C$\in R$ and X, Y, Z>0,

with equality if and only if $\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}$. The equality takes place if and only if $a=b=c=\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}$ if n$\in N^*$ and $a=b=c=\frac{1}{3}$ if n=0.

<u>*Note:*</u> For n=2 we obtain the math problem J211 (Junior Problems) from Mathematical Reflections no 6/2011, author Titu Zvonaru, Comanesti, Romania

Bibliography: Mathematical Reflections no 6/2011, J211, Titu Zvonaru. Collection Coordinator: Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA.

7. ECUAȚII FUNCȚIONALE

Prof. Udma Arleziana Emilia

Colegiul Tehnic“AnghelSaligny”, Roșiorii de Vede, Teleorman

NOTIUNI INTRODUCTIVE

La fel ca notiunea de multime, pentrunotiunea de ecuatiefunctionala este dificil de dat o definitie care sa cuprindatoatetipurile de ecuatiifunctionale.

Vomintelegeprinecuatiefunctionala, o relatiede egalitate in care apareunasau mai multefunctiinecunoscute, care trebuie sa satisfacaegalitateapentruvaloriatribuitevariabilelordintr-o multime data.

Dintreecuatiilefunctionaleclasiceamintim, ca exemplu:

- **Ecuatialui Cauchy**

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y)=f(x)+f(y), x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- **Ecuatialui Jensen**

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- **Ecuatia general liniara**

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(a\cdot x+b\cdot y+c)=A\cdot f(x)+B\cdot f(y)+C\quad, x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

unde a, b ,c, A, B, C $\in\mathbb{R}$

- **Ecuatialuid’Alambert**

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y), x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- **EcuatialuiPexider**

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x+y) = g(x) + h(y), x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

METODE DE REZOLVARE A ECUATIILOR FUNCTIONALE

- **ATRIBUIREA UNOR VALORI PARTICULARE VARIABILELOR**

Dacaintr-o ecuatiefunctionalaatribuimvaloriparticularevariabilelor care apar (din domeniul de definitie al functiei) putemobtinerelatii care conduc la determinareafunctiei.

Problema 1. Sa se rezolveecuatiafunctionala

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x-y) = f(x) \cdot f(y), x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Rezolvare.

$x = y = 0 \Rightarrow f(0) = \left(f(0)\right)^2 \Rightarrow f(0) \in \{0,1\}$.

Daca*f* (0)=0, punand in ecuatie y=0 $\Rightarrow f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, deci *f* =0.

Daca*f* (0)=1, facem in ecuatieschimbarile x → 2x si y → x

$\Rightarrow f(x) = f(2x) \cdot f(x)$ (2)

Dacaexista$a \in \mathbb{R}$ astfel ca *f* (a) = 0, din ecuatie, pentru*y* = *a* $\Rightarrow f = 0$.

Daca$f(x) \neq 0$ pentru orice *x*, din (2) $\Rightarrow f(2x) = 1, x \in \mathbb{R}$, deci *f* =1.

Singurelefunctii care verificaecuatiasuntfunctiileconstantef = 0 si*f* = 1

Problema 2.Determinatitoatefunctiile$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relatia

$(x+y)\left(f(x) - f(y)\right) = f(x^2) - f(y^2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $si y \in \mathbb{R}$

Rezolvare.

Pentru*y* = 0 si *y* = 1, obtinem:

$x\left(f(x) - f(0)\right) = f(x^2) - f(0)$

$(x+1)\left(f(x) - f(1)\right) = f(x^2 - f(1))$

Din care prinscadere:

$f(x) = \left(f(1) - f(0)\right) \cdot x + f(0)$

Deci:*f*(x)=ax+b, $x \in \mathbb{R}$, unde a,b sunt constante reale arbitrare.(aceste functii satisfac relatia)

- **SUBSTITUTII DE FUNCTII SI SCHIMBARI DE VARIABILE**

Rescriereaecuatieifunctionale, cumulatacusubstituireauneifunctiiastfelobtinuta, pot conduce la determinareafunctieiinitiale.Utile,si in acestesituatii ,suntschimbarile de variabile.

Problema 1. Fie $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie care verifica relatia

$f(x+a)+f(x)=1+3\left(\sqrt[3]{(f(x))^2}-\sqrt{f(x)}\right)$, pentru orice $\in\ \mathbb{R}$, unde a $\in\ \mathbb{R}^*$ este o constanta arbitrara. Sa se arate ca functia *f*esteperiodica.

Rezolvare.

Scriemrelatiasub forma:

$$f(x+a)=\left(1-\sqrt[3]{f(x)}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x+a)}=1-\sqrt[3]{f(x)}.$$

Notand$g$ (x) = $\sqrt[3]{f(x)}$, obtinem:

$g(x+a)=1-g(x)$,

$g(x+2a)=1-g(x+a)=1-(1-g(x))=g(x)$,

Deci:

$\sqrt[3]{f(x+2a)}=\sqrt[3]{f(x)} \Leftrightarrow f(x+2a)=f(x), x\in\ \mathbb{R}$.

Functia f are perioada T=2a.

Problema 2.

Sa se determine functia$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si $g\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care pentru orice $x\in\ \mathbb{R}$ verifica sistemul

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=6x+40 \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=2x+6 \end{cases}$$

Rezolvare.

Daca$\frac{y+2}{2}=x+6$, atunci y + 5=2x+15. Inlocuim in relatia a douape x cu 2x+10.

Obtinemsistemul:

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=6x+40 \\ f(x+6)+g(2x+15)=4x+26 \end{cases} \Rightarrow$$

$g(2x+15)=2x+14, x\in\mathbb{R} \Rightarrow g(x)=x-1, x\in\mathbb{R}$

$f(x+6)=2x+12, x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=2x, x\in\mathbb{R}.$

- **FOLOSIREA UNOR INEGALITATI**

Inegalitatilealgebriceremarcabile (inegalitateamediilor,Cauchi-Buniakovschi-Schwarz ,etc.) se pot folosisiele,in special atuncicandrelatiacecaracterizeazafunctia de determinatesteuna de inegalitate.Inacestcazmonotoniafunctiilor are un rolesential.

Problema 1. Sa se determinefunctiile$f$:(0, ∞) $\rightarrow (0,\infty)$ cu proprietatea

$f(ax+by) \leq \frac{1}{4a} \cdot f(x) + \frac{1}{4y} \cdot f(y)$, pentru orice numere pozitive a, b, x, y

Rezolvare.

Pentru$a = \frac{1}{2}$si $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y}$, obtinem:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \cdot f(y) \Leftrightarrow x \cdot f(x) \leq y \cdot f(y)$$

Pentru$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$ si $b = \frac{1}{2}$obtinem:

$y \cdot f(y) \leq x \cdot f(x) \Rightarrow x \cdot f(x) = y \cdot f(y)$, pentru orice x,y.

$\Rightarrow f(x) = \frac{c}{x}, x \in \mathbb{R}$, unde c $x \in (0,\infty)$ este o constanta arbitrara.

Avem: $f(ax+by) = \frac{c}{ax+by}, \frac{1}{4a} \cdot f(x) + \frac{1}{4b} \cdot f(y) = \frac{c}{4a \cdot x} + \frac{c}{4b \cdot y}$ si inegalitatea din enunt este echivalenta cu $\frac{2}{ax+by} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by}\right)$ care este cunoscuta(inegalitatea dintre media aritmetica si media armonica).

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o functie bijectiva, strict crescatoare. Sa se determinefunctiile$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care:

$(f \circ g)(x) \leq x \leq (g \circ f)(x), x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare.

Functiainversaf^{-1}este si ea crescatoare

$$f(g(x)) \leq x \Rightarrow f^{-1}\left(f(g(x))\right) \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) \leq f^{-1}(x)$$

Punem in relatia$x \leq g(f(x))$ in loc de x pe $f^{-1}(x)$si avem:

$f^{-1}(x) \leq g(x)$.Dinceledouarelatiiavem: $f^{-1}(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x), x \in \mathbb{R}$,deci singura functie este $g = f^{-1}$

- **METODE RECURSIVE SI INDUCTIVE**

Metodainductieimatematice o putemfolosi cu succesatuncicandrelatiacecaracterizeazafunctiape care vremsa o determinam are caracter universal in raport cu o variabilasaumaimulte, toatenaturale, din domeniul de definitie

Poblema 1. Sa se determine functiile$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, care indeplinesc simultan conditiile:

a) $f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn, \forall\, m,n\in\mathbb{R}$;

b) Pentruoricen $n\in\mathbb{R}$, numarul $f(n)$ estepatrat perfect.

Rezolvare:

Pentru$m=n=0$, din a) $\Rightarrow f(0)=0$.

Pentru$m=n=1$, din a) $\Rightarrow f(2)=2f(1)+2$.

Din b) exista $a\in\mathbb{N}$ si $b\in\mathbb{N}$ astfel ca $f(1)=a^2$, $f(2)=b^2$. Daca $a$ar fi un numar par atuncinumarul$2a^2+2$ ar fi de forma $4M+2$, deci nu poate fi patrat perfect. Ramane ca a este impar$a=2k+1$, si $b$este un numar par $b=2p$ si avem relatia:

$(2p)^2=2(2k+1)^2+2 \Leftrightarrow 4p^2=4k^2+4k+4 \Leftrightarrow p^2=k^2+k+1 \Rightarrow p>k \Rightarrow p\geq k+1$

$\Rightarrow p^2\geq k^2+2k+1>k^2+k+1$, daca $k\neq 0$.

Deciconditia$p^2=k^2+k+1$, poate fi indeplinita pentru $k=0$ si $p=1$

$\Rightarrow f(1)=1$ si $f(2)=4=2^2$.

Aratamprininductieca $f(n)=n^2, n\in\mathbb{N}$.

Avem: $f(n+1)=f(n)+f(1)+2n$ si din ipoteza de deductie

$$f(n)=n^2 \Rightarrow f(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Problema 2. Sa se determine functiile$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care satisfac conditiile:

a) $f(f(n))=n, n\in\mathbb{N}$

b) $f(f(n+2)+2=n, n\in\mathbb{N}$

c) $f(0)=1$

Rezolvare:

$f(f(n))=n, n\in\mathbb{N} \Rightarrow f$este bijectiva; $n=f(f(n))=f(f(n+2)+2)$

$\Rightarrow f(n)=f(n+2)+2.$ (1)

Din (1) pentru $n = 0 \Rightarrow f(2) = -1$ si prin inductie

$f(2k) = 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$

$f(f(2k)) = 2k \Rightarrow f(1-2k) = 2k = 1-(1-2k), k \in \mathbb{Z}$

Deci, $f(n) = 1 - n, n \in \mathbb{N}$ estesingurafunctie care satisfaceceletreiconditii

PROBLEME PROPUSE

1. Sa se determine toatefunctiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifica relatia

   $x \cdot f(x) = [x] \cdot f(\{x\}) + \{x\} \cdot f([x]), \qquad x \in \mathbb{R}$

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ un numar real. Sa se determinetoatefunctiile $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

   $$f(x) + f\left(\frac{x-a}{x-1}\right) = \frac{x^2-2}{x-1}$$

   pentruorice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o functie cu proprietatile:

a) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) - 1, \quad x, y \in \mathbb{N}^*$

b) Exista un numar finit de numere $x \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(x) = 1$

c) $f(30) = 4$

Sa se determine $f(14400)$.

4. Sa se determine functiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifica relatia:

   $f(x) + f([x]) \cdot f(\{x\}) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$

- **Bibliografie:**

1. *Algebra pentruconcursurisiolimpiadescolare*,Gheorghe Andrei, I. Cucurezeanu, C.Caragea, Gheorghe Bordea-Partea I, coordonatorprofesor Gheorghe Andrei-Constanta 1990.

2.*Matematica pentrugrupele de performanta*, EugenJecan, Vasile Pop, Gh. Lobont, ViorelLupsor, Editura Dacia Educational, Cluj 2004.

3.*600 probleme de matematicapentruconcursuri*–CristinelMorticiEditura Gill, Zalau 2004.

4.Probleme de algebra-functiile „parte intreaga" si „parte fractionara", Gheorghe Andrei, I. Cucurezeanu, C.Caragea, Gheorghe Bordea-Partea I, Editura Gill, Zalau 1996.

8.Inegalităţi cu integrale

prof. Pop Adela Terezia
Colegiul Tehnic „Aurel Vlaicu"

În multe inegalităţi cu integrale, se aplică anumite proprietăţi ale integralei definite. Reamintim câteva din proprietăţile integralei definite.

1) Proprietatea de liniaritate. Dacă f,g:[a,b]$\to$R sunt funcţii continue şi $\lambda \in$R, atunci:

a) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; b) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

2) Dacă f: [a, b]$\to$R+, este o funcţie continuă şi pozitivă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

3) Dacă f, g:[a,b]$\to$R sunt funcţii continue, cu proprietatea: f(x) $\leq$ g(x), $\forall$ x$\in$[a,b], atunci: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4) Proprietatea de aditivitate la interval. Dacă f: [a, b]$\to$R este o funcţie continuă şi c$\in$(a,b) atunci: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5) Dacă $f : [a, b] \to R$ este o funcţie continuă şi $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$ atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

6) Dacă $f : [a, b] \to R_+$ este o funcţie continuă şi pozitivă şi $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$atunci $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

7) Dacă $f : [a, b] \to R_+$ este o funcţie continuă şi pozitivă şi dacă $\exists x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) > 0$ atunci $\int_a^b f(x)dx > 0$.

8) Teorema de medie. Dacă $f : [a, b] \to R$ este o funcţie continuă atunci $\exists \xi \in [a,b]$ astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Aplicaţii

1. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \ln(x^{2014}+1) + x^{2014}$.

a) Să se arate că $\forall k \in [0,\infty), f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1)$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\boldsymbol{R}$.

Rezolvare:
a) Din teorema de medie aplicată funcţiei continue f pe intervalul $[k,k+1]$ obţinem că

$\exists \xi \in [k,k+1]$ astfel încât $f(\xi)=\int_k^{k+1} f(x)dx$.

$$f'(x)=\frac{2014\cdot x^{2013}\left(x^{2014}+2\right)}{x^{2014}+1} \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(0,\infty) \Rightarrow \text{f strict crescătoare pe } [0,\infty).$$

$$\text{Din } \left.\begin{array}{l}\text{f crescatoare pe} [0,\infty)\\ \xi\in[k,k+1], k\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(k)\leq f(\xi)\leq f(k+1) \Rightarrow$$

$$\forall k\in[0,\infty), f(k)\leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1).$$

b) Fie F o primitivă a funcţiei f $\Rightarrow$ F derivabilă pe **R** şi
$F'(x)=f(x), \forall x\in \mathbf{R}$ (1)

x	-∞	**0**	+∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - - -	**-0**	+ + + + + + + + +
f(x)	↘		↗

$\Rightarrow$ 0 punct de minim absolut al funcţiei $\Rightarrow$ $f(x)\geq f(0)=0, \forall x\in \mathbf{R}$ (2)
Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $F'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ F crescătoare pe **R**

2. Se consideră funcţiile

$$f, g : R \to R, f(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3!}, g(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}.$$

a) Să se demonstreze inegalităţile $f(x)>0, \forall x>0$ şi $g(x)<0, \forall x>0$.
b) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6\cdot 7} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3}-\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{10\cdot 11\cdot 12}.$$

Rezolvare:
a) Demonstrăm inegalităţile cerute studiind monotonia şi punctele de extrem ale funcţiilor f şi g.

Calculăm $f'(x)=\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$, $g'(x)=\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$

$$f''(x)=-\sin x + x, \quad g''(x)=-\sin x + x - \frac{x^3}{3!}$$

$$f'''(x)=-\cos x + 1, \quad g'''(x)=-\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$g^{(4)}(x) = \sin x - x,\ g^{(5)}(x) = \cos x - 1.$

Din $f'''(x) = -\cos x + 1 > 0, \forall x \in R - \{2k\pi | k \in Z\} \Rightarrow f''$ este strict crescătoare pe R $\Rightarrow$

$f''(x) > f''(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow$

$f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow$

$f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

Analog pentru funcţia g:

Din $g^{(5)}(x) = \cos x - 1 < 0, \forall x \in R - \{2k\pi | k \in Z\} \Rightarrow g^{(4)}$ este strict descrescătoare pe R $\Rightarrow$

$g^{(4)}(x) < g^{(4)}(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g^{(3)}$ este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$

$g^{(3)}(x) < g^{(3)}(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g''$ este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$

$g''(x) < g''(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g'$ este strict descrescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow$

$g'(x) < g'(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow$

$g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g(x) < 0, \forall x > 0.$

b) Din $f(x) > 0, \forall x > 0$ şi $g(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow$

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \forall x > 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} < \sin x^2 < x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}, \forall x > 0 \overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\underset{\text{Prop. 7}}{\Rightarrow}}$$

$$\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{6 \cdot 7}\right)\right|_0^1 < \int_0^1 \sin x^2 dx < \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{6 \cdot 7} + \frac{x^{11}}{120 \cdot 11}\right)\right|_0^1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 7} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}.$$

3. Se consideră funcţiile

$$f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = arctgx - x + \frac{x^3}{3}, g(x) = arctgx - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}.$$

a) Să se demonstreze inegalităţile $f(x) > 0, \forall x > 0$ şi $g(x) < 0, \forall x > 0.$

b) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{13}{60} < \int_0^1 \mathrm{arctg}(x^3) dx < \frac{11}{48}.$$

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow$

f strict crescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0.$

$g'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 + x^2 - x^4 = \frac{-x^6}{x^2+1} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow$

g strict descrescătoare pe **R** $\Rightarrow$
$g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g(x) < 0, \forall x > 0$.

b) Din $f(x) > 0, \forall x > 0$ şi $g(x) < 0, \forall x > 0$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \forall x > 0 \overset{\text{substituind pe x cu } x^3}{\Rightarrow}$$

$$x^3 - \frac{x^9}{3} < \operatorname{arctg} x^3 < x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5}, \forall x > 0 \underset{\text{Prop. 7}}{\overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\Rightarrow}}$$

$$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{30}\right)\Bigg|_0^1 < \int_0^1 \operatorname{arctg} x^3 \, dx < \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{30} + \frac{x^{16}}{80}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow \frac{13}{60} < \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(x^3\right) dx < \frac{11}{48}.$$

4. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$.

a) Să se calculeze I_1 şi I_3.

b) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c) Să se arate că $I_n + I_{n+4} = \frac{1}{n+1}$.

d) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$.

e) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx\right)$.

f) Să se demonstreze inegalitatea $e \leq \lim_{n\to\infty} \left((2n+4) \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx\right)^n \leq e^5$.

Rezolvare:

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1} dx = \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1} dx = \left(\frac{1}{4} \ln\left(x^4+1\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \ln 2.$$

$$\text{b) } I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^4+1} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^4+1} dx \leq 0 \Rightarrow$$

şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

$$\text{c) } I_n + I_{n+4} = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+4}}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x^4+1\right)}{x^4+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

d) Deoarece $x^n \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$ şi $x^4+1 \geq 1,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{x^n}{x^4+1} \leq x^n,\ \forall x \in [0,1] \overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\Rightarrow} 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx = 0.$$

e) Deoarece $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $\Rightarrow I_n \geq I_{n+4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2I_n \geq I_n + I_{n+4} \\ \text{Dar } I_n + I_{n+4} = \dfrac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n \geq \frac{1}{2n+2}.\ (1)$$

Din $I_n \geq I_{n+4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2I_{n+4} \leq I_n + I_{n+4} \\ \text{Dar } I_n + I_{n+4} = \dfrac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow I_{n+4} \leq \dfrac{1}{2n+2},\ \forall n \in N^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{2n-6},\ \forall n \in N^*,\ \text{n} \geq 5\ .(2)$$

Din inegalităţile (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{n}{2n+2} \leq nI_n \leq \dfrac{\text{n}}{2n-6}, \forall n \in N^*, \text{n} \geq 5$ prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 \dfrac{x^n}{x^4+1}dx\right) = \dfrac{1}{2}.$

g) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n-6},\ \forall n \in N^*,\ \text{n} \geq 5 \Rightarrow$$

$$1 \leq \frac{2\text{n}+4}{2n+2} \leq (2n+4)\cdot I_n \leq \frac{2\text{n}+4}{2n-6}, \forall n \in N^*, \text{n} \geq 5 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\text{n}+2}{n+1}\right)^n \leq \left((2n+4)\cdot I_n\right)^n \leq \left(\frac{\text{n}+2}{n-3}\right)^{\text{n}}, \forall n \in N^*, \text{n} \geq 5 \overset{\text{prin trecere la limita}}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left((2n+4)\cdot I_n\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{\text{n}} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} \leq \lim_{n\to\infty}\left((2n+4)\cdot I_n\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{\frac{\text{n-3}}{5}}\right]^{\frac{5\text{n}}{n-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e \leq \lim_{n\to\infty}\left((2n+4)\cdot\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx\right)^n \leq e^5.$$

Bibliografie

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, Matematică pentru clasa a XII-a, editura Carminis

2. Mircea Ganga, Matematică pentru clasa a XII-a, editura Mathpress

www.mateinfo.ro
revistaelectronica@mateinfo.ro
Coordonator proiect prof. Andrei Octavian Dobre