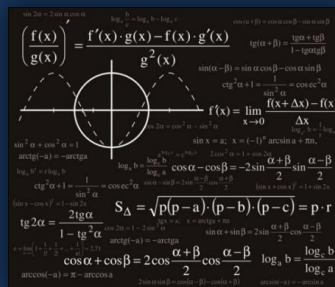
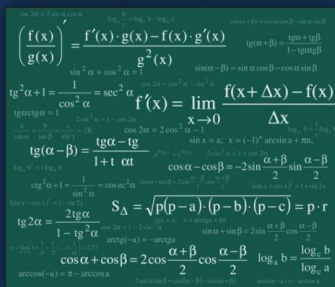


REVISTĂ LUNARĂ
DIN FEBRUARIE 2009
revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

1. CALCULUL LUNGIMILOR UNOR CURBE REMARCABILE ...pag. 2
Rusu Maria
2. METODE DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME DATE LA OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, FAZA JUDEȚEANĂ 2016... pag. 14
Gheorghe Alexe & George-Florin Șerban
3. ASUPRA PROBLEMEI 27097 DIN GM 6 - 7 - 8/2015 ...pag. 17
Marin Chirciu
4. UN ANUMIT TIP DE PROBLEME DE COLINIARITATE –
"În memoria domnului profesor Constantin Apostol (1941-2016)" ... pag. 19
Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu
5. O PROBLEMĂ INTERESANTĂ ... pag. 22
George Florin Șerban
6. SOLUȚII PROBLEMA LUNII APRILIE 2016... pag.23
Propusă de Andrei Octavian Dobre
7. CONCURS PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI PROBLEMA LUNII MAI 2016 ... pag.29
Autor: Constantin Telteu
8. SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ – MAI 2016 ... PAG. 30
9. SIMULARE BAC MATEMATICĂ –MATE-INFO - MAI 2016 ... PAG. 35

1. CALCULUL LUNGIMILOR UNOR CURBE REMARCABILE

Prof. Rusu Maria, Școala Gimnazială Buznea, Iași

În cele ce urmează sunt prezentate lungimile unor curbe remarcabile, printre care și cele care se exprimă printr-o integrală eliptică, integrală care nu poate fi calculată ci doar aproximată prin diverse metode. În prima parte sunt ilustrate noțiuni de bază, printre care: formule de calcul pentru curbe exprimate în diverse tipuri de prezentări, formula lui Gauss, forma redusă a formulei lui Legendre, algoritmul mediilor aritmetico-geometrice etc.

Preliminarii

Teoremă. Fie Γ o curbă plană definită de funcția $f = (f_1, f_2)$, unde $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivata integrabilă. Atunci Γ este rectificabilă (are lungime) și avem:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} dt.$$

Corolar. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata integrabilă. Atunci G_f , graficul lui f , este o curbă rectificabilă și avem:

$$l(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Teoremă. Fie Γ o curbă plană reprezentată în coordonate polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Atunci Γ este rectificabilă și avem:

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta.$$

Definiție. Integrala $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}$, $|x| < 1$, se numește integrală eliptică completă de prima specie.

Definiție. Integrala $E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2 \sin^2 t} dt$, $|x| < 1$ se numește integrală eliptică completă de specia a doua.

Formula lui Legendre (legătura între cele două integrale) Fie $x \in (0, 1)$ și $x' = \sqrt{1-x^2}$, atunci $K(x) \cdot E(x') + K(x') \cdot E(x) = K(x) \cdot K(x') + \frac{\pi}{2}$.

Observație. Remarcăm că pentru $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atunci $x = x'$ și deci formula lui Legendre se scrie sub forma simplificată:

$$2 \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Corolar.

$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$, $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$ și astfel relația precedentă devine:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Algoritmul mediilor aritmetico-geometrice

Acest algoritm este unul dintre cei mai importanți algoritmi neliniari ajutând la aproximarea integralelor eliptice. Acest algoritm a fost descoperit de Gauss în 1816 la vârsta de 14 ani.

Fie $a > b > 0$. Algoritmul mediilor aritmetico-geometrice este:

$$(A-G) \begin{cases} a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, n \geq 1, a_0 = a, b_0 = b \\ b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}} \end{cases}$$

Folosind inegalitatea cunoscută dintre media geometrică și cea aritmetică se poate arăta că ,
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 = a$.

Șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fiind convergente și trecând la limită în una din relațiile anterioare de recurență se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Valoarea comună a celor două limite se notează cu

$M(a, b)$, reprezintă media aritmetico-geometrică depinzând de valorile inițiale a și b .

Exemplu:

```
>> a0=1
a0 =
    1
>> b0=0.8
b0 =
    0.8
>> a1=(a0+b0)/2
a1 =
    0.9
>> b1=sqrt(a0*b0)
b1 =
    0.894427190999916....
>> a2=(a1+b1)/2
```

```

a2 =
  0.897213595499958...
>> b2=sqrt(a1*b1)
b2 =
  0.897209268732732....
>> a3=(a2+b2)/2
a3 =
  0.897211432116345...
>> b3=sqrt(a2*b2)
b3 =
  0.897211432113737....
>> a4=(a3+b3)/2
a4 =
  0.897211432115041....
>> b4=sqrt(a3*b3)
b4 =
  0.897211432115041....

```

Propoziția de mai jos pune în evidență o formulă de calcul a erorii care ilustrează viteza mare de convergență a acestui algoritm.

Propoziție Fie $a > b > 0$, șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ generate de (A-G) verifică relația:

$$a_n - b_n \leq 8b \cdot \left(\frac{a-b}{8b} \right)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observații: a) $M(a, b) = M(b, a), \forall a, b > 0$

b) $M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right), \forall a, b > 0$

c) $M(c \cdot a, c \cdot b) = cM(a, b), \forall c > 0$

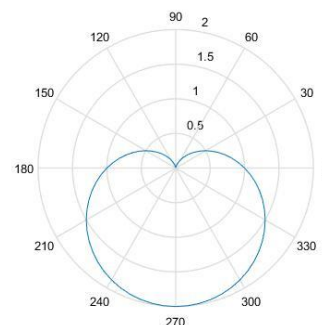
Calculul lungimilor

1. Lungimea cardioidei

În geometrie, **cardioida** este o epicicloidă cu o cuspidă. Cardioida este o curbă plană descrisă de un punct de pe un cerc în timp ce acesta se rostogolește, fără alunecare, pe un alt cerc fix, exterior și de aceeași rază.

Cardioida este, de asemenea, și un caz particular al melcului lui Pascal: este un melc cu o cuspidă. Cuspida este formată atunci când raportul dintre a și b din ecuație este echiunitar.

Cardioida a fost studiată de Römer în 1674, utilizată de Vaumesle în 1678 și J. Koërsma în 1689, dar denumirea a fost propusă de G. Castilion în 1741. Numele ei provine de la forma



asemănătoare unei inimi (gr. *kardioeides*: *kardia*, "inimă" și *eidos*, "formă"). Comparată cu simbolul care reprezintă inima (♥), se observă că inima are două vârfuri ascuțite, pe când cardioida numai unul. Este mai degrabă asemănătoare cu secțiunea transversală printr-o prună. Cardioida este transformata inversă a parabolei.

Ecuția cardioidelor în coordonate polare se scrie: $\rho(\theta) = a(1 - \cos \theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Atunci $\rho'(\theta) = a \sin \theta$ și $(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2 = a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta = 2a^2(1 - \cos \theta) = 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, deci:

$$\frac{1}{2}l = \int_0^\pi \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta = 2a \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -2a \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 \Big|_0^\pi = -4a(-1) = 4a$$

Prin urmare lungimea cardioidelor este $l=8a$.

2.Lungimea melcului

Melcul este reprezentat parametric prin ecuația $\rho(\theta) = a \cos \theta + b$. Atunci

$$\rho'(\theta) = -a \sin \theta \text{ și } (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2 = a^2 + 2ab \cos \theta + b^2 = (a+b)^2 \left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

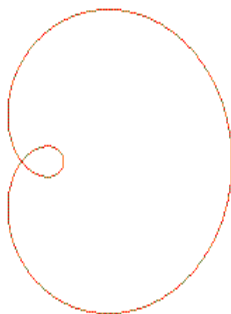
Pentru $b \neq a$, lungimea arcului de la un punct în care $\theta = 0$ până la un punct oarecare cu $\theta < \pi$, este o integrală eliptică de specia a doua:

$$\begin{aligned} l &= (a+b) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2(a+b) \int_0^{\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 t} dt = \\ &= 2(a+b) E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Lungimea întregii curbe se exprimă prin:

$$L = 4(a+b) E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$$

Melcul lui Pascal
a = 0.3
b = 0.2



Pentru cazul particular al cardioidelor $a = b$, lucrurile se simplifică foarte mult. În acest caz

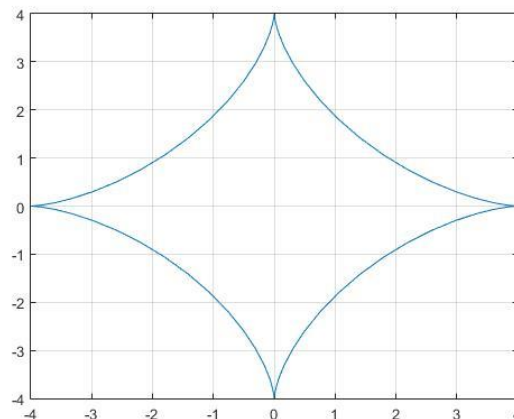
$$(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \text{ pentru } 0 < \theta < \pi \text{ de unde,}$$

$$l = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 4a(1-0) = 4a. \text{ Lungimea întregii cardioidelor va fi } 8a.$$

3. Lungimea astroidei

În matematică, o astroidă este un tip particular de curbă: o hipocicloidă cu patru vârfuri. Este de asemenea și o super elipsă cu $n=2/3$ și $a=b$. Numele său modern provine din greacă, din echivalentul cuvântului "stea". Curba a avut o varietate de nume, incluzând tetracuspidă (încă folosit), cubocicloidă și paraciclu.

Un cerc cu raza de $1/4$ se învârtă în interiorul unui cerc de rază 1 și un punct de pe circumferința lui delimitează o astroidă. Un segment de lungime 1 se plimbă cu un capăt pe axa x și cu celălalt pe axa y , astfel încât este tangent la astroidă (care este deci înfășurătoare).



Ecuția astroidei se scrie $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$. Astroida fiind simetrică față de axele de coordonate, cât și față de prima bisectoare, avem $L = 8l(G_f)$, unde G_f este graficul funcției

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, x \in [x_0, a] \text{ unde } x_0 = 2^{-\frac{2}{3}}a \text{ este abscisa punctului de intersecție dintre}$$

astroidă și primul bisectoare, în primul cadran. Vom

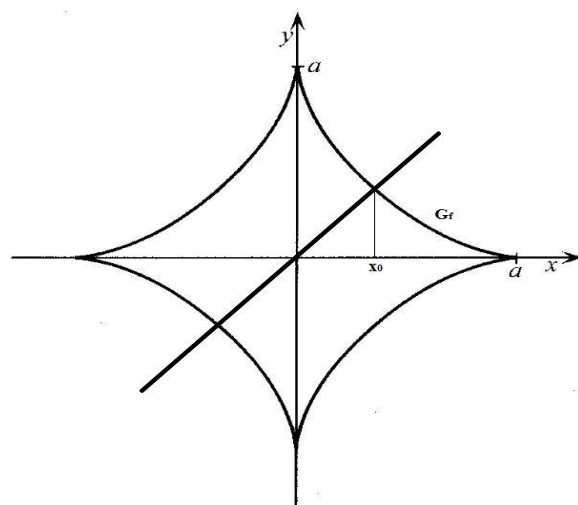
avea $l(G_f) = \int_{x_0}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$. Cum

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ deci}$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right) = a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}, \forall x \in [x_0, a],$$

$$\text{deducem } l(G_f) = \int_{x_0}^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \Big|_{x_0}^a = \frac{3a}{4}. \text{ Prin}$$

$$\text{urmare lungimea astroidei este egală cu } 8 \cdot \frac{3a}{4} = 6a.$$



Observație. Putem reprezenta arcul de astroidă din primul cadran, parametric, prin ecuațiile:

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ și avem } l = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = 6a.$$

4. Lungimea unei ramuri de cicloidă

O cicloidă este o curbă trasată de un punct fix de pe un cerc care se rostogolește pe o dreaptă. Este un exemplu de ruletă, o curbă generată de o curbă care se rostogolește pe o altă curbă.



Cicloida
a = 0.1
b = 0.2

Ecuția parametrică a primei bucle de cicloidă se scrie:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Atunci $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$ deci avem

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2 \left[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \right] = 2a^2 (1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\text{și deci } l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5. Lungimea evolventei cercului

Reprezentarea parametrică pentru evolventa cercului este dată astfel:

$$\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

Avem, pentru $t > 0$, $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = at\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = at$, așa că arcul variabil AM de

la punctul A ($t = 0$) până la un punct M ($t > 0$) se exprimă astfel: $AM = l = \int_0^t ax \, dx = \frac{at^2}{2}$.

Dacă $t < 0$, în ultimul membru al formulei precedente trebuie numai să se pună semnul minus.

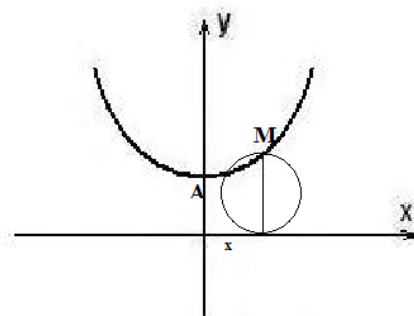
6. Lungimea lăntişorului

Lăntişorul este curba pe care o descrie o coardă flexibilă, inextensibilă, ținută de extremități și lăsată apoi să cadă.

Lăntişorul este graficul funcției $f(x) = ach \frac{x}{a}$, $x \in [a, b]$.

Deoarece $\sqrt{1 + f'^2(x)} = ch \frac{x}{a}$, dacă se ia ca origine a arcelor

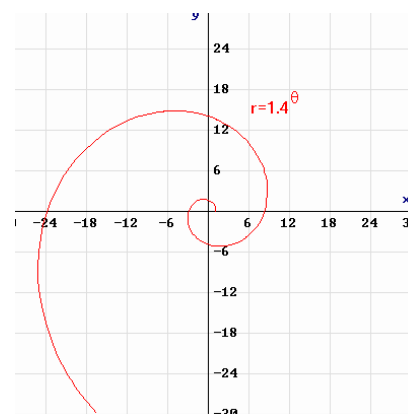
vârful A al curbei, avem: $l = \widehat{AM} = \int_0^x ch \frac{t}{a} dt = ash \frac{x}{a}$.



7. Lungimea unui arc al spiralei logaritmice

Spirala logaritmică se întâlnește frecvent în natura, de exemplu la modul de așezare a semințelor florilor. Un caz se poate verifica și cu ochiul liber, datorită faptului că totul se petrece „la scară mare”: floarea-soarelui. Este ușor de constatat că semințele florii-soarelui sunt dispuse în așa fel încât formează două serii de spirale logaritmice: o serie de spirale curbate în sensul minutarelor unui ceasornic, iar cealaltă serie de spirale curbate în sens invers.

A fost studiată intens de Jacob Bernoulli, de unde îi vine numele de *spirala lui Bernoulli*. Acesta a numit-o și *Spira mirabilis*. Mai mult decât atât: la floarea-soarelui, cele două sensuri de curbura ale unui exemplar nu prezintă un număr egal de spirale, dar nici două numere diferite întâmplătoare, ci... două numere succesive din șirul lui Fibonacci: la floarea normală, mijlocie (cu diametrul de cca. 12... 15 cm) se pot număra de obicei 34 spirale într-un sens și 55 spirale în celălalt sens; la exemplarele mici 13 și 21, sau 21 și 34 spirale; iar la exemplarele mari până la 89 și 144 spirale. Spirala logaritmică se întâlnește și în profilul multor specii de cochilii. Astronomii au avut surpriza să descopere spirale logaritmice pe plăcile lor fotografice: aceasta este forma nebuloaselor spirale și a cozilor celor mai multe comete.



Reprezentarea spiralei logaritmice este dată de ecuația $\rho(\theta) = ae^{m\theta}$, iar $\rho'(\theta) = m\rho(\theta)$,

rezultă că $\rho(\theta) = \frac{1}{m} \rho'(\theta)$. Pentru un arc M_0M dintre două puncte cu coordonatele (ρ_0, θ_0)

și (ρ, θ) , vom avea:

$$l = M_0M = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho'(\theta) d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} (\rho - \rho_0).$$

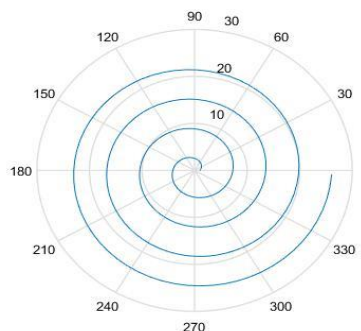
8. Lungimea unui arc al spiralei lui Arhimede

Spirala lui Arhimede este o curbă plană descrisă de un punct ce parcurge uniform (cu viteza v) o dreaptă care se rotește (cu viteza constantă ω) în jurul unui punct fix al ei. Ecuația curbei în coordonate polare (reperul fiind format cu pozițiile inițiale ale punctului și dreptei) este:

$$\rho = a\theta \text{ unde } a = \frac{v}{\omega}$$

Considerând arcul de la polul O până la un punct M (corespunzător unghiului θ), se obține:

$$l = OM = a \int_0^\theta \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2} \left(\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln \left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right)$$



9. Lungimea cercului

Ecuația unui cerc $x^2 + y^2 = R^2$, din semiplanul superior, cuprins între două bisectoare este:

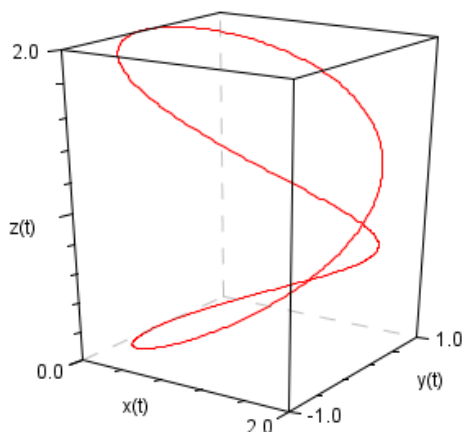
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, -\frac{R}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Avem $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ și $1 + (y'(x))^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$, deci lungimea cercului este:

$$L = 4 \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 4 \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = 4R \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi R.$$

10. Lungimea arcului unei elice circulare

Elicea circulară este curba descrisă de un punct ce se deplasează pe un cilindru circular astfel încât deplasarea de-a lungul axei de rotație a cilindrului să fie proporțională cu unghiul de rotație în jurul aceleiași axe.

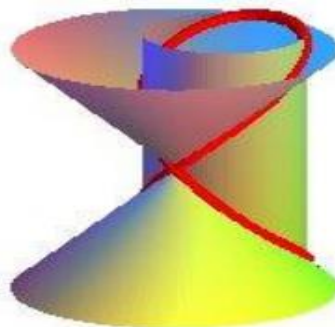
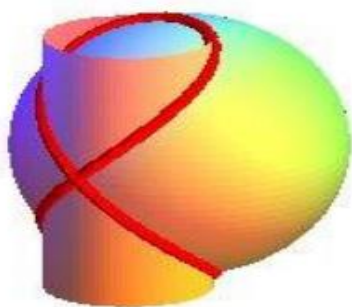


Elicea este reprezentată parametric prin ecuațiile: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$.

Deoarece $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$, lungimea arcului curbei de la punctul $A(t=0)$ până la punctul $M(t \text{ oarecare})$ va fi:

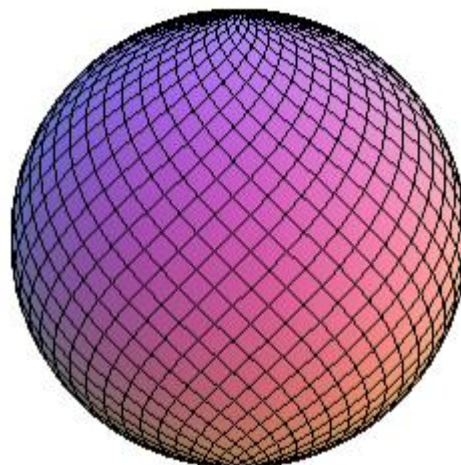
$l = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = t\sqrt{a^2 + c^2}$, rezultat evident dacă se are în vedere că, prin desfășurarea suprafeței cilindrice, elicea de pe ea se transformă într-o dreaptă.

Această curbă a fost studiată de Viviani și Roberval în 1692. Numele inițial, dat de Roberval, era de ciclo-cilindrică însă este mai cunoscută sub numele de “fereastra lui Viviani”. Curbă lui Viviani este intersecția unei sfere de rază R și a unui cilindru de rotație de diametru R a cărei generatoare trece prin centrul sferei. Ea este de asemenea inclusă într-un con de rotație a cărui axă este o generatoare a unui cilindru. Acestea se pot observa în figurile următoare:



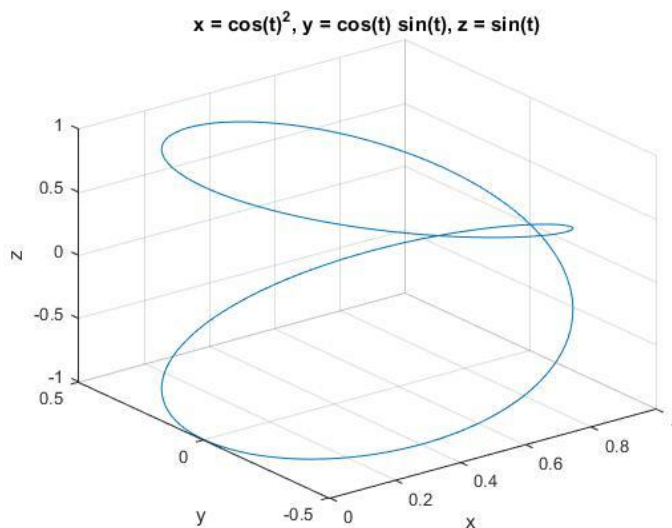
Vincenzo Viviani (5 Aprilie 1622- 22 Septembrie 1703) matematician și savant italian. Elevul lui Torricelli și discipol al lui Galileo Galilei. Născut și crescut în Florența el a studiat la o școală Iezuită. Acolo, Marele Duce, Ferdinando II de Medici, i-a dăruit o bursă pentru a-și cumpăra cărțile de matematică de care avea nevoie. A lucrat în domeniul fizicii și geometriei. Există un crater pe Luna denumit Viviani după numele matematicianului.

Un exemplu concret în care a fost folosită curba lui Viviani este “Muzeul maritim din Osaka” construit după schițele arhitectului P. Andreu.



Constructia lui este realizată după o sferă acoperită de o rețea de curbe Viviani.

Această curbă are reprezentarea parametrică folosind drept parametru longitudinea t pe sferă: $x = R \cos^2 t, y = R \sin t \cos t, z = R \sin t, t \in (0, 2\pi)$.



Avem :

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} &= \sqrt{(2R \sin t \cos t)^2 + R^2 \cos^4 t + R^2 \cos^2 t - 2R^2 \sin^2 t \cos^2 t} = \\ &= R \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 + \cos^2 t} = R \sqrt{1 + \cos^2 t} \end{aligned}$$

În acest caz lungimea întregii curbe se exprimă prin integrala eliptică completă de specia a doua:

$$L = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 4\sqrt{2}R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt = 4\sqrt{2}RE \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Folosind forma redusă a formulei lui Legendre, obținem: $L = \frac{\sqrt{2}R\pi}{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + 2\sqrt{2}R \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Deoarece $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}M(\sqrt{2}, 1)}$, avem:

$$L = 2R \left[\frac{\pi}{M(\sqrt{2}, 1)} + M(\sqrt{2}, 1) \right] = R \cdot l.$$

Utilizând șirurile algoritmului mediilor -geometrice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru care $a_0 = \sqrt{2}$ și $b_0 = 1$. Atunci $2\left(b_n + \frac{\pi}{a_n}\right) \uparrow l \downarrow \left(a_n + \frac{\pi}{b_n}\right)$ și deci se obține folosind o formulă de evaluare a erorii în acest calcul:

$$l - 2\left(b_n + \frac{\pi}{a_n}\right) < 2\left[(a_n - b_n) + \pi\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right)\right] < 2((a_n - b_n) + \pi(a_n - b_n)) < 16(1 + \pi)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}.$

Dacă, de exemplu, vrem să calculăm lungimea l cu trei zecimale exacte, se rezolvă inegalitatea:

$$16(1 + \pi)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^n} < 10^{-3}. \text{ Pentru } n = 2, \text{ obținem } 16(1 + \pi)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^2} < 0,0004762... < 10^{-3}.$$

Rezultă că $2\left(b_2 + \frac{\pi}{a_2}\right)$ va da primele trei zecimale exacte ale lungimii l care aparține în exprimarea lungimii curbei lui Viviani.

Avem

```
>> a0=sqrt(2)
```

```
a0 =
```

```
1.414213562373095
```

```
>> b0=1
```

```
b0 =
```

```
1
```

```
>> a1=(a0+b0)/2
```

```
a1 =
```

```
1.207106781186548
```

```
>> b1=sqrt(a0*b0)
```

```
b1 =
```

```

1.189207115002721
>> a2=(a1+b1)/2
a2 =
1.198156948094634
>> b2=sqrt(a1*b1)
b2 =
1.198123521493120
>> 2*(b0+pi/a0)
ans =
6.442882938158366
>> 2*(a0+pi/b0)
ans =
9.111612431925776
>> 2*(b1+pi/a1)
ans =
7.583575368279734
>> 2*(a1+pi/b1)
ans =
7.697721563555218
>> 2*(b2+pi/a2)
ans =
7.640289000236836
>> 2*(a2+pi/b2)
ans =
7.640502157637791

```

Observăm că 7,640 este o aproximare cu trei zecimale exacte a lungimii l , prin urmare lungimea curbei va fi $L = R \cdot 7,640$; în plus rezultă că pentru $n = 3$ se obține o aproximare a lungimii curbei lui Viviani cu 8 zecimale exacte: $L = R \cdot 7,64039557$. Această creștere rapidă a exactității se datorează vitezei de convergență a algoritmului mediilor aritmetico-geometrice.

Bibliografie

1. Fihtenholț G.M.-Curs de calcul diferențial și integral, Editura Tehnică, București, 1965.
2. Florescu L.-Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor, Universitatea „Al. I. Cuza”, Facultatea de Matematică, Iași, 2004.
3. Sirețchi Gh.-Calcul diferențial și integral, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.

2. METODE DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME DATE LA OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ , FAZA JUDEȚEANĂ 2016

Gheorghe Alexe , profesor , Liceul Tehnologic “Nicolae Titulescu “ , Insuratei

George-Florin Serban , profesor , Liceul Pedagogic “D.P.Perpessicius” , Braila

Vom prezenta in continuare cateva metode de rezolvare a unor probleme date la olimpiada nationala , faza judeteană 2016 , diferite de cele din barem.

**1)Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel incat $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{b+a+1} \leq 1$,
atunci sa se arate ca $\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{b+a+1} \geq 1$.**

Clasa a 9-a

Solutie: Folosim substitutiile lui Ravi $b+c+1=x$, $a+c+1=y$, $b+a+1=z$,
 $b+c=x-1 \geq 0$,

$a+c=y-1 \geq 0$, $b+a=z-1 \geq 0$, obtin ca $a = \frac{-x+y+z-1}{2}$, $b = \frac{x-y+z-1}{2}$,

$c = \frac{x+y-z-1}{2}$, inegalitatea devine , $(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + (\frac{z}{x} + \frac{x}{z}) + (\frac{z}{y} + \frac{y}{z}) - (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \leq 5$,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + (\frac{z}{x} + \frac{x}{z}) + (\frac{z}{y} + \frac{y}{z}) - 5 \geq 2+2+2-5=1$,

$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{b+a+1} \geq 1$, egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.

2)Fie $a, b, c \in C^*$, distincte si avand acelasi modul astfel incat

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = 0 .$$

Demonstrati ca a, b, c reprezinta afixele unui triunghi dreptunghic sau echilateral .

Clasa a 10-a

Solutie: Luam $|a|=|b|=|c|=1$, conjugam relatia (1) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = 0$ data si
obtinem, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{cb} + \frac{1}{ac} = 0$, (2) $a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2 + abc(a+b+c) = 0$, din
(1) rezulta

$$(3) \quad (a+b)^2 + (c+b)^2 + (a+c)^2 = 0, \text{ din (2) rezulta (4)}$$

$$a^2(b+c)^2 + b^2(a+c)^2 + c^2(b+a)^2 = 0,$$

Din (3) rezulta $(a+b)^2 = -(c+b)^2 - (a+c)^2$, inlocuim in (4) si obtinem

$$\begin{cases} (b+c)(a+c)(ab-c^2) = 0 \\ (b+c)(a+b)(ac-b^2) = 0 \\ (b+a)(a+c)(bc-a^2) = 0 \end{cases}, \text{ de aici rezulta ca triunghiul poate fi dreptunghic in}$$

A(a) sau B(b) sau C(c). In cazul $\begin{cases} ab = c^2 \\ ac = b^2 \\ bc = a^2 \end{cases}$, folosim ipoteza, rezulta

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac = 0,$$

$(a+b+c)^2 = 0$. In sistemul de axe xoy, $z_H = z_G = z_O$, deci $\triangle ABC$ echilateral.

3)Fie ABCD un patrat si E un punct situate pe diagonala BD, diferit de mijlocul acesteia .Se noteaza cu H si K ortocentrele triunghiurilor ABE, respectiv ADE. Sa se arate ca $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{O}$.

Clasa a 9-a

Solutie: Fie $A(-a,0)$, $B(0,-a)$, $C(a,0)$, $D(0,a)$, $O(0,0)$ in reperul cartezian xoy.
Fie $AO \perp EB$, $AB \perp ET$, $AO \cap ET = \{H\}$, $AO \perp ED$, $AD \perp EF$, $AO \cap EF = \{K\}$,

$\frac{BE}{DE} = m > 1$, $l_4 = a\sqrt{2}$, $ET \parallel AD$, $EL \parallel CD$, din asemanare si teorema lui Menelaos
avem,

$$\frac{OH}{AH} = \frac{m-1}{2} = \frac{OK}{KC}. \text{ Deci } \overrightarrow{BH} = \frac{2}{m+1}\overrightarrow{BO} + \frac{m-1}{m+1}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DK} = \frac{2}{m+1}\overrightarrow{DO} + \frac{m-1}{m+1}\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{DK} = \frac{2}{m+1}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}) + \frac{m-1}{m+1}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \frac{2}{m+1} \cdot \overrightarrow{O} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}.$$

4)Fie $A, B, C, D \in M_n(C)$, $n \geq 2$ **si** $k \in R$, **astfel incat** $AC + kBD = I_n$ **si** $AD = BC$.
Demonstrati ca $CA + kDB = I_n$ **si** $DA = CB$.

Clasa a 11-a

Solutie: Cazul I Fie $k \in R^*$. **Vom determina** $p \in R^*$, **stiind ca**

(1) $(A + pB) \cdot (C - pD) = AC + kBD = I_n$ **si** **(2)** $(A - pB) \cdot (C + pD) = AC + kBD = I_n$,
 $(\forall) A, B, C, D \in M_n(C)$. **Din (1) rezulta** $AC - pAD + pBC - p^2BD = AC + kBD = I_n$,
 $AC - p(AD - BC) - p^2BD = AC + kBD$, $AC - p^2BD = AC + kBD$, $(k + p^2)BD = O_n$,
 $p^2 = -k > 0$, $p \in \{-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}\}$. **Din (2) rezulta**
 $AC + pAD - pBC - p^2BD = AC + kBD = I_n$, $AC - p(-AD + BC) - p^2BD = AC + kBD$,
 $(k + p^2)BD = O_n$, $p \in \{-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}\}$.

Deci (1) $(A + pB) \cdot (C - pD) = I_n$, **(2)** $(A - pB) \cdot (C + pD) = I_n$ **rezulta ca matricele**

$A + pB, A - pB, C + pD, C - pD$ **sunt inversabile** . **Deci** $(A + pB)^{-1} = C - pD$,

$(A - pB)^{-1} = C + pD$, $(C + pD)^{-1} = A - pB$, $(C - pD)^{-1} = A + pB$, **rezulta ca**

$(C - pD) \cdot (A + pB) = (A + pB) \cdot (C - pD) = I_n$, $(C + pD) \cdot (A - pB) = (A - pB) \cdot (C + pD) = I_n$,

$\begin{cases} CA + pCB - pDA - p^2DB = I_n \\ CA - pCB + pDA - p^2DB = I_n \end{cases}$, **le scadem si obtinem** $2p(CB - DA) = O_n$, $p \neq 0$,
 $DA = CB$

Si $CA + kDB = I_n$ **si reciproc este adevarat** $\begin{cases} CA + kDB = I_n \\ CB = DA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC + kBD = I_n \\ BC = AD \end{cases}$.

Cazul II Daca $k = 0$, $\begin{cases} AC = I_n \\ AD = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CA = I_n \\ DA = CB \end{cases}$, $AC = I_n$, $A^{-1} = C$, $C^{-1} = A$

rezulta

$CA = A^{-1}A = I_n$, $CA = I_n$. **Stim ca** $AD = BC$ **inmultim cu A la dreapta,**

$ADA = BCA = B \cdot I_n = B$

$ADA = B$ **inmultim cu C la stanga** , $(CA)(DA) = CB$, $I_n \cdot (DA) = CB$, $DA = CB$ **si**
 $CA = I_n$.

3. Asupra problemei 27097 din GM 6 - 7 - 8/2015Marin Chirciu¹

În GM 6 - 7 - 8/2015 dl Traian Tămâian, Carei propune următoarea problemă:

„Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem: $\prod \frac{\sin^2 A + \sin B \sin C}{\sin B + \sin C} \geq \frac{S}{2R^2}$ „

Vom prezenta 2 generalizări ale acestei probleme:

G1: „Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem:

$$\prod \frac{\sin^{n+1} A + \sin B \sin^n C}{(\sin B + \sin C)^n} \geq \frac{S}{2^{3n-2} R^2}, \text{ unde } n \in \mathbb{N} \text{ ”}$$

Soluție: Vom demonstra următoarea propoziție ajutătoare:

Lema 1 „Dacă $a, b, c > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ atunci $\prod \frac{a^{n+1} + b \cdot c^n}{(b+c)^n} \geq \frac{abc}{8^{n-1}}$.

Demonstrația Lemei 1: Obținem succesiv: $\frac{a^{n+1} + b \cdot c^n}{(b+c)^n} \cdot \frac{b^{n+1} + c \cdot a^n}{(c+a)^n} \cdot \frac{c^{n+1} + a \cdot b^n}{(a+b)^n} \geq \frac{abc}{8^{n-1}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{n+1} + bc^n}{ab} \cdot \frac{b^{n+1} + ca^n}{bc} \cdot \frac{c^{n+1} + ab^n}{ca} \geq \frac{(a+b)^n (b+c)^n (c+a)^n}{8^{n-1} abc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^{n+1}}{ab} + \frac{c^{n+1}}{ac} \right) \left(\frac{b^{n+1}}{bc} + \frac{a^{n+1}}{ab} \right) \left(\frac{c^{n+1}}{ca} + \frac{b^{n+1}}{ab} \right) \geq \frac{(a+b)^n (b+c)^n (c+a)^n}{8^{n-1} abc}.$$

Folosim inegalitatea $\frac{x^k}{\alpha} + \frac{y^k}{\beta} \geq \frac{(x+y)^k}{2^{k-2}(\alpha+\beta)}$, $\forall x, y, \alpha, \beta > 0$ și $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, adevărată din

inegalitatea lui Holder: $\left(\frac{x^k}{\alpha} + \frac{y^k}{\beta} \right) (\alpha + \beta) \underbrace{(1+1) \dots (1+1)}_{\text{de } (n-2) \text{ ori } (1+1)} \geq (x+y)^k$.

În cazul nostru $k = n+1$. Obținem: $\left(\frac{a^{n+1}}{ab} + \frac{c^{n+1}}{ac} \right) \left(\frac{b^{n+1}}{bc} + \frac{a^{n+1}}{ab} \right) \left(\frac{c^{n+1}}{ca} + \frac{b^{n+1}}{ab} \right) \geq$

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

$$\geq \frac{(a+c)^{n+1}}{2^{n-1}a(b+c)} \cdot \frac{(b+c)^{n+1}}{2^{n-1}b(c+a)} \cdot \frac{(c+b)^{n+1}}{2^{n-1}c(a+b)} = \frac{(a+b)^n(b+c)^n(c+a)^n}{8^{n-1}abc}.$$

Pentru $n=0$ avem inegalitatea cunoscută: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Folosind teorema sinusurilor și Lema 1 obținem inegalitatea din enunț.

G2: „Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem:

$$\prod \frac{\sin^{n+1} A + \sin B \sin^n C}{\sin B + \sin C} \geq \left(\frac{S}{2R^2} \right)^n, \text{ unde } n \in \mathbb{N}''$$

Soluție: Vom demonstra următoarea propoziție ajutătoare:

Lema 2 „Dacă $a, b, c > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ atunci $\prod \frac{a^{n+1} + b \cdot c^n}{b+c} \geq (abc)^n$.

Demonstrația Lemei 2: Pentru $n=0$ se obține identitatea $1=1$.

Pentru $n \geq 1$ inegalitatea se scrie: $\prod \frac{a^{n+1} + b \cdot c^n}{ab} \geq \prod (b+c)(abc)^{n-2}$.

$$\text{Avem } \prod \frac{a^{n+1} + b \cdot c^n}{ab} = \prod \left(\frac{a^n}{b} + \frac{c^n}{a} \right) \stackrel{\text{Holder}}{\geq} \prod \frac{(a+c)^n}{2^{n-2}(b+a)} = \frac{\prod (b+c)^{n-1}}{\prod 2^{n-2}} \stackrel{(1)}{\geq} \prod (b+c)(abc)^{n-2},$$

$$\text{unde } (1) \Leftrightarrow \frac{\prod (b+c)^{n-2}}{\prod 2^{n-2}} \geq (abc)^{n-2} \Leftrightarrow \left[\prod \left(\frac{b+c}{2} \right) \right]^{n-2} \geq (abc)^{n-2}.$$

Pentru $n=2$ avem egalitate; iar pentru $n \geq 3$ inegalitatea este adevărată deoarece

$$\prod \left(\frac{b+c}{2} \right) \geq abc \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc, \text{ evident din } a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ și analoagele.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Folosind teorema sinusurilor și Lema 2 obținem inegalitatea din enunț.

Să remarcăm că în generalizările **G1** și **G2** pentru $n=1$ se obține problema **27097** din **GM 6** - 7 - 8/2015.

4. Un anumit tip de probleme de coliniaritate

Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu

”În memoria domnului profesor Constantin Apostol (1941-2016)”

Punctul de plecare al acestor rânduri este următoarea problemă propusă la Olimpiada Națională de matematică din Brazilia în 2015:

P1. "Fie ABC un triunghi scalen ascuțitunghic. Notăm cu N centrul cercului lui Euler și cu D punctul de intersecție al tangentelor duse în punctele B și C la cercul circumscris $\triangle ABC$. Să se demonstreze că punctele A , D și N sunt coliniare dacă și numai dacă $\angle A = 45^\circ$."

În cele ce urmează, vom avea nevoie de următoarea

Lemă. În exteriorul triunghiului ABC construim triunghiul BCD astfel încât dreapta A separă punctele B și C . Dacă AD intersectează latura BC în punctul T și $\angle CBD = \beta$, $\angle BCD = \gamma$, atunci

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c \sin(B + \beta) \sin \gamma}{b \sin(C + \gamma) \sin \beta}.$$

Demonstrație: Folosind rapoarte de arii și teorema sinusurilor, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{BT}{TC} &= \frac{[ABT]}{[ACT]} = \frac{[DBT]}{[DCT]} = \frac{[ABT] + [DBT]}{[ACT] + [DCT]} = \frac{[ABD]}{[ACD]} = \\ &= \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD} = \frac{c \sin(B + \beta) \sin \gamma}{b \sin(C + \gamma) \sin \beta}. \end{aligned}$$

Soluția problemei P1: Luând în Lema $\beta = \gamma = A$, obținem:

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c \sin(B + A)}{b \sin(C + A)} = \frac{c \sin C}{b \sin B} = \frac{c^2}{b^2},$$

deci AD este simediana din A . Pentru a face o legătură cu punctul N , dorim să calculăm raportul în care dreapta AN împarte latura BC . Fie E punctul de intersecție dintre AN și BC , iar N_a , N_b , N_c proiecțiile punctului N pe laturile BC , CA , respectiv AB . Știind că N este mijlocul lui HO (H ortocentrul și O centrul cercului circumscris), obținem:

$2NN_a = 2R \cos B \cos C + R \cos A = R(\cos(B + C) + \cos(B - C) + \cos A) = R \cos(B - C)$,
și analog $2NN_b = R \cos(C - A)$, $2NN_c = R \cos(A - B)$.

Rezultă că

$$\frac{BE}{EC} = \frac{[ABE]}{[ACE]} = \frac{[BNE]}{[CNE]} = \frac{[ABE] - [BNE]}{[ACE] - [CNE]} = \frac{[ANB]}{[CNA]} = \frac{c \cos(A - B)}{b \cos(C - A)}.$$

Condiția că punctele A, N, D sunt coliniare se scrie succesiv:

$$\sin B \cos(A - B) = \sin C \cos(C - A) \Leftrightarrow \sin A + \sin(2B - A) = \sin(2C - A) + \sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin(2B - A) - \sin(2C - A) = 0 \Leftrightarrow \sin(B - C) \cos(B + C - A) = 0.$$

Cum triunghiul este scalen avem doar posibilitatea $B + C - A = 90^\circ$, adică

A, N, D sunt coliniare dacă și numai dacă $A = 45^\circ$.

Folosind aceeași metodă, dorim să obținem caracterizări ale triunghiului ABC în care punctul A și două puncte importante ale triunghiului ABC sunt coliniare. Sunt

interesante doar situațiile în care triunghiul ABC nu este isoscel (cu $AB = AC$), deoarece într-un triunghi isoscel foarte multe puncte importante se găsesc pe axa de simetrie a triunghiului (care este mediană, bisectoare, înălțime etc.).

Într-un triunghi ABC notăm cu I centrul cercului înscris, K punctul lui Lemoine, V punctul lui Vecten, F punctul lui Fermat, N centrul cercului lui Euler, N_p punctul lui Napoleon.

P2. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A, K și V sunt coliniare.

(problema 2905, Crux Mathematicorum 1/2004, enunț adaptat)

Soluție: Fie T intersecția dreptei AV cu latura BC. Punctul V se află pe dreapta AD, unde D este centrul pătratului BCXY construit în exteriorul triunghiului. Folosind lema, obținem:

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c \sin(B + 45^\circ)}{b \sin(C + 45^\circ)}.$$

Coliniaritatea punctelor A, K, V este echivalentă cu

$$b \sin(B + 45^\circ) = c \sin(C + 45^\circ) \Leftrightarrow \sin B \sin(B + 45^\circ) = \sin C \sin(C + 45^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2B + 45^\circ) = \cos(2C + 45^\circ) \Leftrightarrow \sin(B + C + 45^\circ) = 0 \Leftrightarrow A = 45^\circ.$$

P3. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A , N și V sunt coliniare.

Soluție: Coliniaritatea punctelor A , N , V este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \sin(B + 45^\circ)\cos(C - A) &= \sin(C + 45^\circ)\cos(A - B) \\ \Leftrightarrow \sin(B+C+45^\circ - A) + \sin(B+A+45^\circ - C) &= \sin(C+A+45^\circ - B) + \sin(C+B+45^\circ - A) \\ \Leftrightarrow \sin(225^\circ - 2C) = \sin(225^\circ - 2B) = 0 &\Leftrightarrow 225^\circ - 2B + 225^\circ - 2C = 180^\circ \\ \Leftrightarrow A = 45^\circ. \end{aligned}$$

P4. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A , N și N_p sunt coliniare.

Soluție: Fie D centrul triunghiului echilateral BCX construit în exteriorul triunghiului ABC . Se știe că punctul N_p se află pe dreapta AD . Dacă AD intersectează latura BC în punctul T , folosind Lema, avem:

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c \sin(B + 30^\circ)}{b \sin(C + 30^\circ)}.$$

Coliniaritatea punctelor A , N , N_p este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \sin(B + 30^\circ)\cos(C - A) &= \sin(C + 30^\circ)\cos(A - B) \\ \Leftrightarrow \sin(B+C+30^\circ - A) + \sin(B+A+30^\circ - C) &= \sin(C+A+30^\circ - B) + \sin(C+B+30^\circ - A) \\ \Leftrightarrow \sin(B+A+30^\circ - C) = \sin(C+A+30^\circ - B) &\Leftrightarrow \sin(210^\circ - 2C) = \sin(210^\circ - 2B) \\ \Leftrightarrow 420^\circ - 2B - 2C = 180^\circ &\Leftrightarrow A = 60^\circ. \end{aligned}$$

P5. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A , I și N_p sunt coliniare.

Soluție: Coliniaritatea punctelor A , I , N_p este echivalentă cu

$$\sin(B + 30^\circ) = \sin(C + 30^\circ) \Leftrightarrow B + C + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 60^\circ.$$

P6. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A , I și V sunt coliniare.

Soluție: Coliniaritatea punctelor A , I , V este echivalentă cu

$$\sin(B + 45^\circ) = \sin(C + 45^\circ) \Leftrightarrow B+C+90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ.$$

P7. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A, N și F sunt coliniare.

Soluție: Construim în exteriorul $\triangle ABC$ triunghiul echilateral BCD . Punctul F este situat pe dreapta AD . Dacă AD intersectează latura BC în punctul T , folosind Lema, avem:

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c \sin(B + 60^\circ)}{b \sin(C + 60^\circ)}.$$

Coliniaritatea punctelor A, N, F este echivalentă cu

$$\sin(B + 60^\circ)\cos(C - A) = \sin(C + 60^\circ)\cos(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B + C + 60^\circ - A) + \sin(B + A + 60^\circ - C) = \sin(C + A + 60^\circ - B) + \sin(C + B + 60^\circ - A)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B + A + 60^\circ - C) = \sin(C + A + 60^\circ - B) \Leftrightarrow \sin(240^\circ - 2C) = \sin(240^\circ - 2B)$$

$$\Leftrightarrow 240^\circ - B - C = 90^\circ \Leftrightarrow A = 30^\circ.$$

P8. Să se determine unghiul A al triunghiului scalen ABC știind că punctele A, I și F sunt coliniare.

Soluție: Coliniaritatea punctelor A, I, V este echivalentă cu

$$\sin(B + 60^\circ) = \sin(C + 60^\circ) \Leftrightarrow B + C + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 120^\circ.$$

5. O problemă interesantă ...

Dati exemplu de un număr $\overline{abcd}$ care verifica simultan conditiile :

i) $\overline{cd}$ este patrat perfect

ii) $\overline{abcd} = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)$

George-Florin Serban , profesor , Braila

Solutie: Fie $a+b+c+d=9$, $\overline{abcd} = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)$. Daca doua din numerele a, b, c si d sunt pare si doua numere sunt impare, am avea in doua parateze doua numere pare deci $\overline{abcd} : 4$, daca a, b, c si d sunt pare rezulta $\overline{abcd} : 2^6$, daca a, b, c si d sunt impare rezulta $\overline{abcd} : 2^6$, daca 3 numere sunt pare si unul impar rezulta $\overline{abcd} : 2^3$, daca 3 numere sunt impare si unul par rezulta $\overline{abcd} : 2^3$, deci $\overline{abcd} : 4$ rezulta $\overline{cd} : 4$. Din i) rezulta $\overline{cd} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ dar $a+b+c+d=9$, rezulta $\overline{cd}=16$. Deci $a+b+1+6=9$, $a+b=2$. Daca $a=2, b=0$, $2016 = 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, (A). Deci $\overline{abcd} = 2016$.

6. SOLUȚII PENTRU PROBLEMA LUNII APRILIE 2016

„Un cilindru de rotație are axa de rotație $[AC']$ a cubului $ABCD A'B'C'D'$ și cercurile de bază tangente muchiilor cubului care concură în A , respectiv în C' . Dintre toți cilindrii cu aceste proprietăți determinați pe cel cu volum maxim.”

Soluție:

Planul unei baze a cilindrului fiind perpendicular pe diagonala $[AC']$ a cubului intersectează muchiile care concură în A (sau C') în puncte care împreună cu A (sau C') formează un tetratru tridreptunghic în A (respectiv C') asemenea cu $ABDA'$. Raza cercului circumscris triunghiului echilateral $A'BD$ este $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Notăm cu x distanța planelor cilindrului A și C' . Atunci raza cercurilor de baza rezultă

$$\text{din } \frac{\frac{x}{x\sqrt{3}}}{3} = \frac{\frac{r}{a\sqrt{6}}}{3} \Rightarrow r = x\sqrt{2}.$$

Volumul cilindrului este $V = 2\pi x^2(a\sqrt{3} - 2x)$.

Volumul maxim se realizează când $x^2(a\sqrt{3} - 2x)$ este maxim.

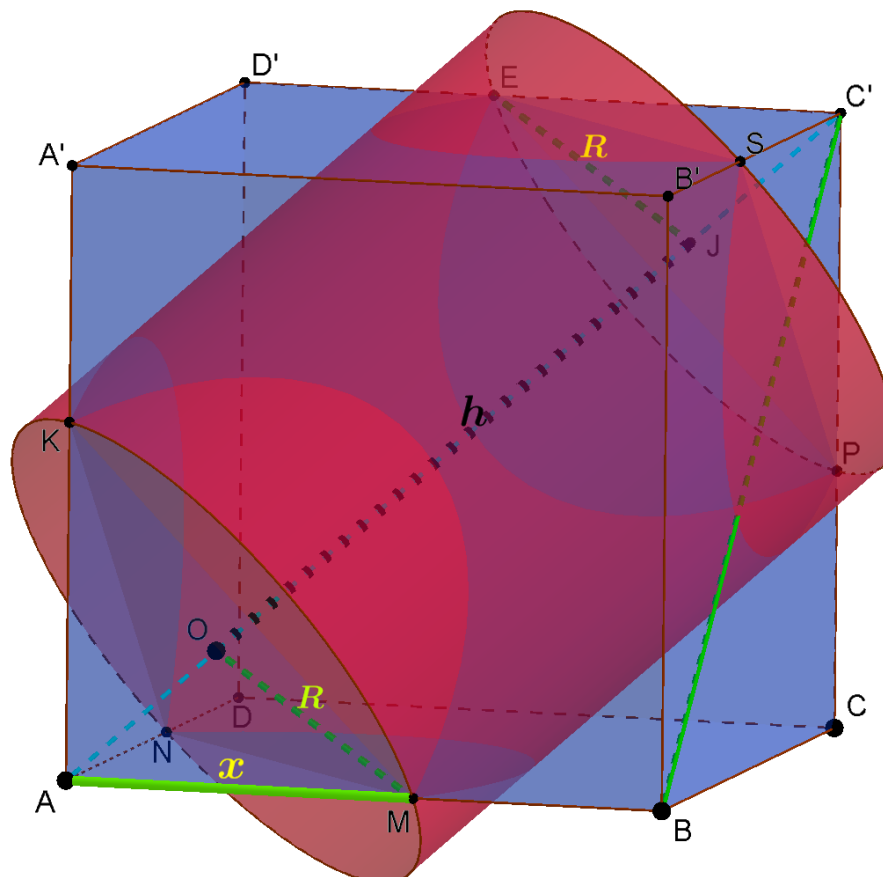
Conform inegalității mediilor avem

$$x^2(a\sqrt{3} - 2x) \leq \frac{x + x + a\sqrt{3} - 2x}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}, \text{ egalitatea având loc când } x = a\sqrt{3} - 2x,$$

deci pentru $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Rezultă că cercurile de bază ale cilindrului sunt circumscrise triunghiurilor $A'BD$, respectiv $CB'D'$.

ALTE SOLUȚII:

1. PROF. CONSTANTIN TELTEU, C. N. A. „REGINA MARIA”, CONSANTA



Voi nota cu a lungimea muchiei cubului, cu x distanța de la vârful A , respectiv C' , la punctele de tangență cu bazele cilindrului, cu R raza cilindrului, O și J centrele bazelor cilindrului.

Din triunghiurile dreptunghice ABC' și AOM avem:

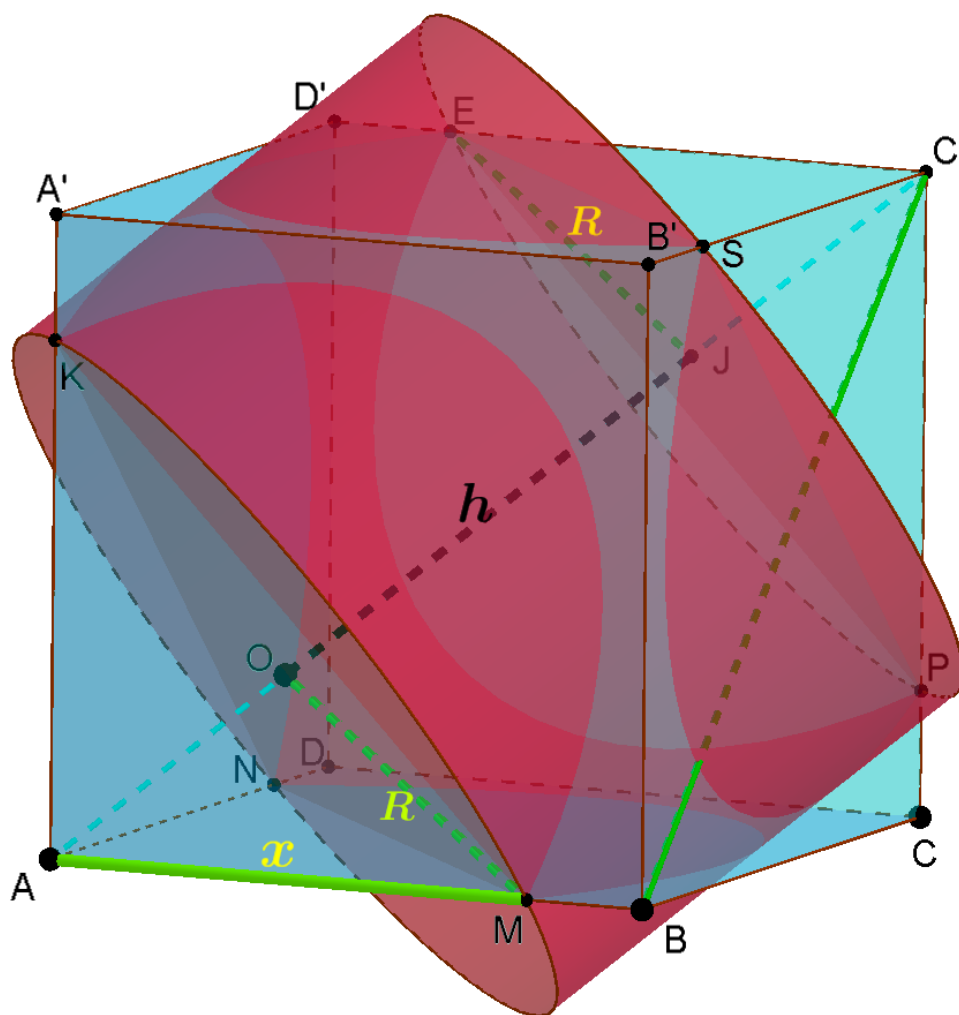
$$\left. \begin{aligned} \sin BAC' &= \frac{BC'}{AC'} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \sin OAM &= \frac{OM}{AM} = \frac{R}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ (sau din } \triangle ABC' \sim \triangle AOM \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos OAM &= \frac{OA}{AM} = \frac{OA}{x} \\ \cos BAC' &= \frac{AB}{AC'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OA = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ (sau din asemănarea de mai sus, sau$$

cu t. lui Pitagora din $\triangle AOM$).

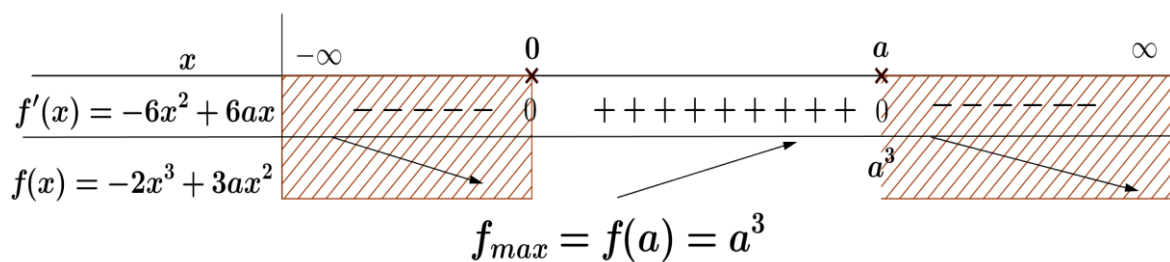
Înălțimea cilindrului este $h = OJ = AC' - 2 \cdot AO = a\sqrt{3} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{3a - 2x}{\sqrt{3}}$.

Volumul cilindrului este: $V = \pi \cdot \frac{2x^2}{3} \left(\frac{3a-2x}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot x^2 (3a-2x).$

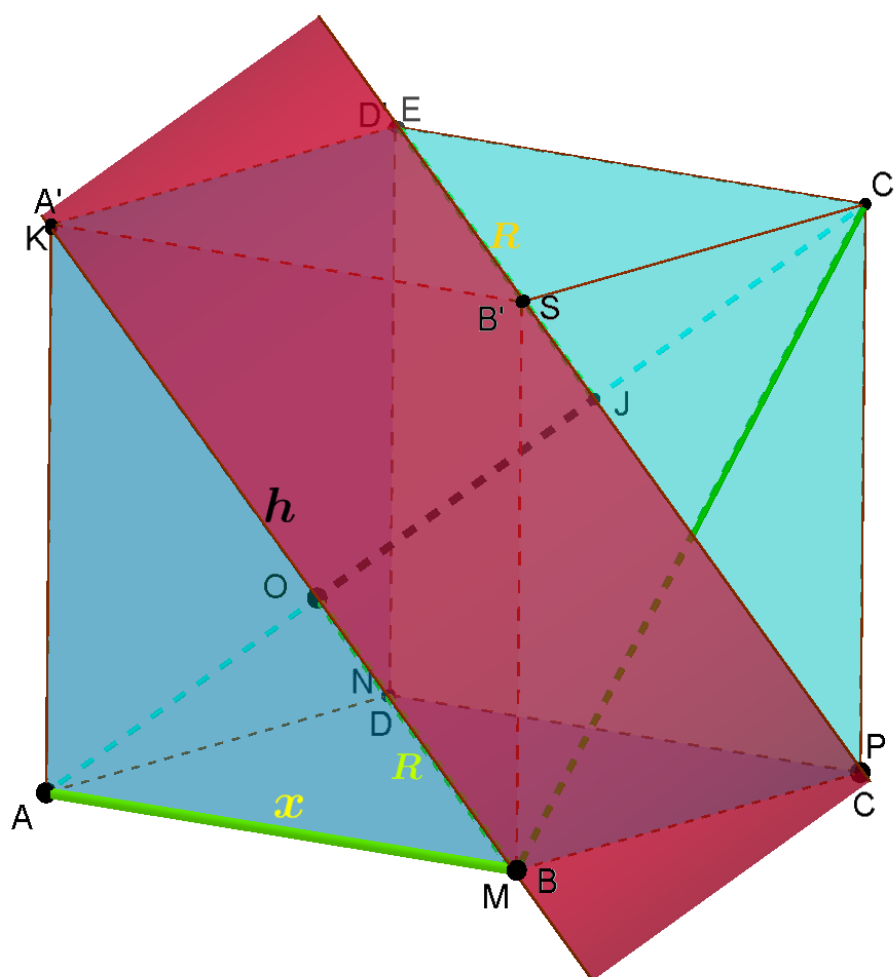
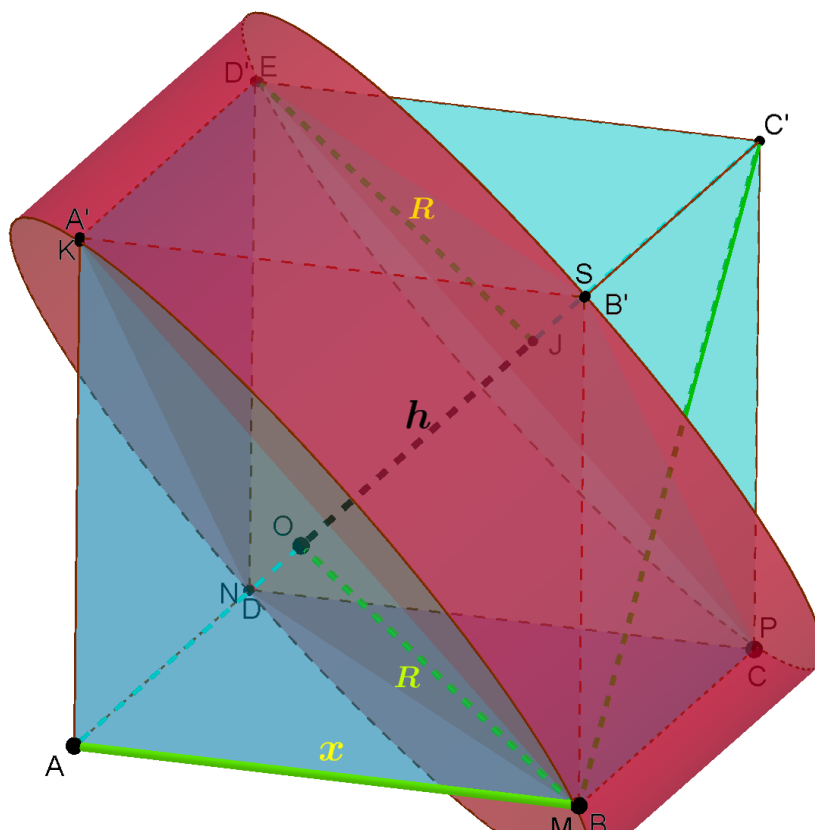


Studiem puțin funcția: $f : (0; a] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = -2x^3 + 3ax^2$

$f'(x) = -6x^2 + 6ax$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = a$; $0 \notin (0; a]$.



$V_{\max} = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$, valoare ce se obține pentru cilindrul cu $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (Fiecare bază a cilindrului trece prin câte trei vârfuri ale cubului.) În figurile următoare se vede acest cilindru.



4. PROF. PACURAR COSMIN

Fie $AB=a$ și $AO=x$ unde O este centrul bazei cilindrului, care este mai aproape de A , punctul de tangență de pe AA' îl notez cu M .

Din $\triangle AOM \sim \triangle AA'C'$ rezultă $R=OM=x\sqrt{2}$.

$$G=AC'-2AO=a\sqrt{3}-2x.$$

$$f(x) = \pi R^2 G = 2\pi x^2(a\sqrt{3}-2x), f: (0, \frac{a\sqrt{3}}{3}] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 4\pi x(a\sqrt{3}-3x) \text{ iar } x=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ e punct de maxim pentru } f.$$

$$\text{Volumul maxim este egal cu } f\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

5. PROF. RUSU MARIA, ȘCOALA GIMNAZIALĂ BUZNEA, IAȘI

Se consideră diagonală $[AC']$ a cubului drept axă de rotație pentru cilindru. Deoarece cercurile de bază sunt tangente muchiilor cubului care concură în A , respectiv C' , iar cilindrul căutat are volum maxim rezultă că bazele acestui cilindru sunt echivalente cu cercurile circumscrise triunghiurilor $\triangle DA'B$, respectiv $\triangle D'CB'$. Fie O_1, O_2 centrele acestor cercuri. Mai întâi se observă că din $DB \parallel D'B', DA' \parallel CB'$ și $(DB, DA'), (D'B', CB')$ fiind perechi de drepte concurente se deduce paralelismul planelor $(DA'B)$ și $(D'CB')$. Pe de altă parte $[AA'] \equiv [AB] \equiv [AD]$, deci proiecția punctului A pe planul $(DA'B)$ coincide cu centrul cercului circumscris. Prin urmare $pr_{(DA'B)} A = O_1$. Analog $pr_{(D'CB')} C' = O_2$. Cum triunghiul

$\triangle DA'B$ este echilateral cu latura $a\sqrt{2}$, unde a reprezintă lungimea muchiei cubului se deduce că raza cilindrului va avea lungimea $R = AO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. În piramida

triunghiulară regulată $ADA'B$ avem $AO_1 = \sqrt{A'A^2 - A'O_1^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Analog

se obține $C'O_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, prin urmare înălțimea cilindrului este $h = C'A - AO_1 - C'O_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Volumul cilindrului căutat va fi } V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^3\pi}{9}.$$

8. SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ

- MAI 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

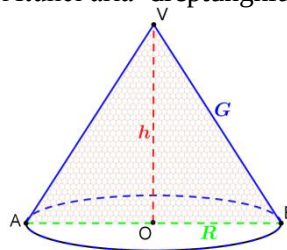
(5p) 1. Rezultatul calculului $2 - 2^0 \cdot 0^2$ este ...

(5p) 2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ și $2a+b=20$, atunci media aritmetică a numerelor a și b este ...

(5p) 3. Cel mai mare număr întreg care **nu** aparține intervalului $(-2; +\infty)$ este ...

(5p) 4. Un dreptunghi are lățimea de 10 cm și perimetrul de 100 cm. Atunci aria dreptunghiului este ... cm^2 .

(5p) 5. Conul din figura alăturată are secțiunea axială un triunghi echilateral a cărui latură are lungimea de 10 cm. Atunci aria laterală a conului este de ... cm^2 .



(5p) 6. În urma unui test elevii unei clase au obținut notele redată în tabelul de mai jos:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	2	5	4	10	6	3	2

Media notelor din intervalul $[6;8]$ scrisă sub formă de fracție zecimală este

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) 1. Desenați pe foaia de examen un cilindru circular drept, cu raza unei baze și axa de rotație

(5p) 2. Arătați că numărul $\overline{37a} + \overline{7a3} + \overline{a37}$ este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra a nenulă.

(5p) 3. Într-o expediție participă de două ori mai mulți geologi decât biologi. După o săptămâna pleacă 20 geologi și sosesc 18 biologi. Astfel numărul geologilor și biologilor devine egal. Câți biologi au fost prezenți la începutul expediției?

4. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Reprezentați în plan punctele $A = G_f \cap Ox$ și $B = G_f \cap Oy$ iar apoi graficul funcției.

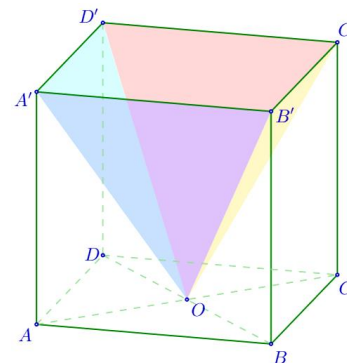
(5p) b) Dacă $C(-2;0)$ și $D(0;-2)$, arătați că $ABCD$ este pătrat.

(5p) 5. Arătați că numărul $a = E(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}$, unde

$$E(x) = \left[\frac{1}{x} + 1 + \left(x + \frac{1}{x} \right) : \frac{x^2 + 1}{x(x+1)} \right] : (x+1); \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.(30 de puncte)

1. Un vas din metal (vezi figura alăturată) s-a obținut din cubul $ABCD A' B' C' D'$ prin înlăturarea piramidei $OA' B' C' D'$, unde O este intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$. Latura cubului este de 12 cm.



(5p) a) Încăpe un litru de apă în vas?

(5p) b) Dacă vasul este plin cu apă, care este aria suprafeței unde?

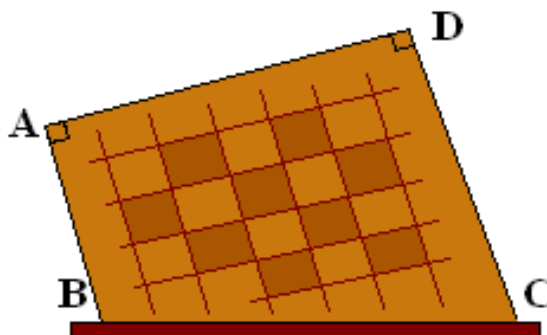
(5p) c) Vasul este gol și din interiorul său din punctul O pleacă o furnică. Mergând pe drumul cel mai scurt, furnica ajunge în punctul A . Ce distanță parcurge ea?

2. În figura de mai jos este reprezentat un suport pentru șervețele sub forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $AB = 7$ cm, $CD = 13$ cm, iar lungimile laturilor BC și AD sunt direct proporționale cu numerele 5 și 4.

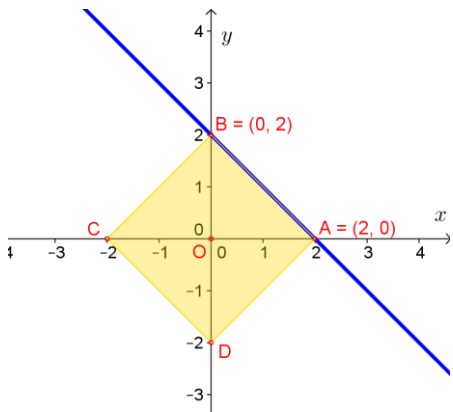
(5p) a) Calculați lungimea laturii BC ;

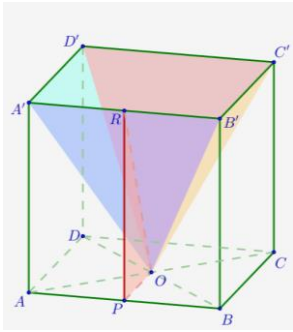
(5p) b) Calculați suprafața trapezului;

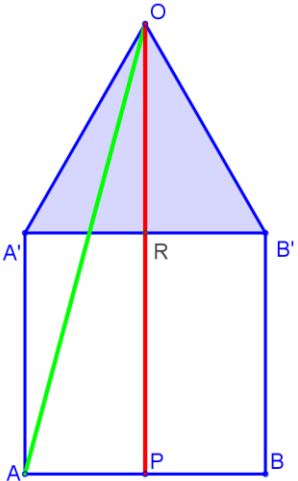
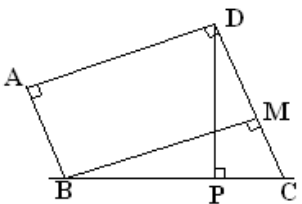
(5p) c) Calculați distanța de la punctul D la baza BC a suportului.



BAREM SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ**- MAI 2016**

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	2	5p
2.	7	5p
3.	-2	5p
4.	400	5p
5.	50π	5p
6.	7,1	5p
SUBIECTUL II		(30 de puncte)
1.	Realizarea desenului	5p
2.	$111a+1110=111(a+10)$ $=3\cdot 37(a+10):37$	3p 2p
3.	$g=2b$, $g-20=b+18$ $b=38$	3p 2p
4.	 a) Reprezentarea punctului A Reprezentarea punctului B Reprezentarea dreptei AB	2p 2p 1p

	b) Reprezentarea punctelor C și D Diagonalele AC și BD se înjumătățesc, deci $ABCD$ este paralelogram Diagonalele AC și BD sunt congruente, deci $ABCD$ este dreptunghi Diagonalele AC și BD sunt perpendiculare, deci $ABCD$ este pătrat	2p 1p 1p 1p
5	$E(x) = \left[\frac{1+x}{x} + \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x(x+1)}{x^2+1} \right] \cdot \frac{1}{x+1} =$ $= \frac{1}{x} + 1$ $E(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Z}$	2p 1p 2p
SUBIECTUL III		(30 de puncte)
1.	$V_{\text{piramidă}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = 576 \text{ cm}^3 =$ a) $= 0,576 \text{ dm}^3 =$ $= 0,576 \text{ l} < 1 \text{ l}$ Răspuns: NU.	2p 1p 1p 1p
	b) Calculul apotemei piramidei RO din triunghiul POR , cu t. lui Pitagora: $RO = A_p = 6\sqrt{5} \text{ cm}$  Aria suprafeței ude este de fapt aria laterală a piramidei $OA'B'C'D'$, adică: $A_l = \frac{P_b \cdot A_p}{2} = 144\sqrt{5} \text{ cm}^2$	1p 1p 3p

	c) Punem în același plan fața $ABB'A'$ a cubului și fața laterală $OA'B'$ a piramidei. Drumul furnicii este segmentul verde din figura de mai jos (Drumul cel mai scurt între două puncte este cel drept!)  AO se calculează cu t. lui Pitagora din triunghiul OPA, în care $OP = OR + RP = 6(2 + \sqrt{5})\text{ cm}$ $OA = 6\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}\text{ cm} \approx 26,12\text{ cm}$	2p 1p 2p
2.	a) $\frac{BC}{5} = \frac{AD}{4} = k \Rightarrow BC = 5k; AD = 4k$ $BM \perp DC \Rightarrow \triangle BMC \text{ dr} \Rightarrow MC = 6\text{ cm}; BM = AD = 4k$ Aplicând teorema Pitagora $\Rightarrow MC = 3k = 6 \Rightarrow k = 2$ $\Rightarrow BC = 10\text{ cm}$ 	2p 1p 1p 1p
	b) $A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2}$ $AD = 8\text{ cm} \quad A_{ABCD} = 80\text{ cm}^2$	1p 1p 3p
	c) $DP \perp BC \Rightarrow \triangle DPC \text{ dr}$ $\angle M \equiv \angle P; \angle C \equiv \angle C \Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle DPC$ $\frac{BM}{DP} = \frac{BC}{DC} \Leftrightarrow \frac{8}{DP} = \frac{10}{13}, \quad DP = \frac{52}{5}$	1p 1p 2p 1p

9. SIMULARE BAC MATEMATICĂ MATE-INFO - MAI 2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- ♦ Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- ♦ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- ♦ La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați $\sqrt[3]{64} + \log_2 \sqrt{64}$.
- (5p) 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x-1}$. Să se calculeze $f(2) + f(3) + \dots + f(10)$
- (5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2 - 6x} = 3x$.
- (5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{8, 9, 10, \dots, 40\}$ acesta să fie divizibil cu 4.
- (5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ și $\vec{v} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.
- (5p) 6. Într-un triunghi ABC se cunosc $AB = 12$, $BC = 8$, $AC = 6$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -x+1 \\ 2x-1 & -x+1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$.
- (5p) a) Să se calculeze $A(-1) + A(1)$.
- (5p) b) Notăm matricea $A(-1) \times A(1) = B \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine B^n , $n \geq 1$.
- (5p) c) Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^n A(k)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
- $$x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
- (5p) a) Să se arate că $x * y = (2x-1)(2y-1) + \frac{1}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (5p) b) Să se verifice dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție asociativă pe $\mathbb{R}$.
- (5p) c) Să se demonstreze că $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-2} (2x-1)^n + \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{(ax+b)^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine a și b , numere reale, astfel încât dreapta $y = \frac{1}{4}x + 1$ să fie asimptotă la graficul funcției.

(5p) b) Pentru a și b găsiți la a). să se stabilească domeniul maxim de definiție al funcției și apoi să se studieze monotonia funcției.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \cdot f(x) \right)^{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

(5p) b) Să se determine $a > 0$ astfel încât $\int_a^{a+1} f(x) dx = 1 - 3 \ln \frac{5}{4}$.

(5p) c) Să se arate că $0 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{1}{4}$.

Selecție din culegerile

WWW.MATEINFO.RO

Prof. Silvia Brabeceanu

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
SIMULARE BAC MATEMATICĂ MATE-INFO MAI 2016

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt[3]{64} + \log_2 \sqrt{64} = \sqrt[3]{4^3} + \log_2 \sqrt[3]{4^3} = 4 + \log_2 4$ finalizare, rezultat 6	3p 2p
2.	$f(2) + f(3) + \dots + f(10) = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$ Termenii unei progresii geometrice cu $a_1 = 2, q = 2$ și $n = 9$. Suma $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$ $S_9 = \frac{2(1-2^9)}{1-2}$; Finalizare, rezultat 1022	1p 2p 2p
3.	C.E. $x^2 - 6x \geq 0 \Rightarrow x(x-6) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ Rezolvarea ecuației $x^2 - 6x = 9x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \in C.E. \\ x_2 = \frac{-3}{4} \notin C.E. \end{cases}$ Verificare	2p 2p 1p
4.	Mulțimea multiplilor lui 4 este $M_4 = \{8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ $Card(M_4) = 9$ și $Card(A) = 33$ $P = \frac{Card(M_4)}{Card(A)} = \frac{9}{33}$	2p 1p 2p
5.	$\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = 2(3\vec{i} - 5\vec{j}) + \frac{1}{2}(-4\vec{i} - 2\vec{j})$ Calcule, finalizare $w = 4\vec{i} - 11\vec{j}$	2p 3p
6.	Formula de lucru $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ Înlocuire $\cos B = \frac{8^2 + 12^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$ Finalizare $\cos B = \frac{43}{48}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A(-1) + A(1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	2p 2p 1p
b)	$A(-1) \times A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B$ $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n - nr. \text{ par} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & n - nr. \text{ impar} \end{cases}$	1p 3p 1p
c)	$\sum_{k=1}^n A(k) = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 2k-1 & -k+1 \\ 2k-1 & -k+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (2k-1) & \sum_{k=1}^n (-k+1) \\ \sum_{k=1}^n (2k-1) & \sum_{k=1}^n (-k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 & \frac{n-n^2}{2} \\ n^2 & \frac{n-n^2}{2} \end{pmatrix}$	1p 4p
2. a)	$x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2} = 4xy - 2x - 2y + 1 + \frac{1}{2}$ $4xy - 2x - 2y + 1 + \frac{1}{2} = 2x(2y-1) - (2y-1) + \frac{1}{2} = (2x-1)(2y-1) + \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$(x * y) * z = \left(4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2} \right) * z = \dots = 16xyz - 8(xz + yz + xy) + 4(x + y + z) - \frac{3}{2}$ $x * (y * z) = x * \left(4yz - 2y - 2z + \frac{3}{2} \right) = \dots = 16xyz - 8(xz + yz + xy) + 4(x + y + z) - \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$P(n): \underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-2} (2x-1)^n + \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $n = 2 \Rightarrow x * x = (2x-1)^2 + \frac{1}{2}$ $n = 3 \Rightarrow x * x * x = 2(2x-1)^3 + \frac{1}{2}$ Pp. $P(n)$ adevărat $\Rightarrow P(n+1)$ adevărat	2p

$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} * x = \left[2^{n-2} (2x-1)^n + \frac{1}{2} \right] * x = \dots = 2^{n-1} (2x-1)^{n+1} + \frac{1}{2}$	3p
---	----

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$y = mx + n, m \neq 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \text{ și } n = 1$ $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm 2$ $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(\pm 2x+b)^2} - \frac{1}{4}x \right) = \frac{-4b}{16} = 1 \Rightarrow b = \mp 4$	1p 2p 2p
b)	$f(x) = \frac{x^3}{2(x-2)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f'(x) = \left[\frac{x^3}{2(x-2)^2} \right]' = \frac{x^2(x^2-8x+12)}{2(x-2)^4}$ $f'(x) \geq 0$ pe $(-\infty, 0]$ și $[6, \infty) \Rightarrow f(x)$ crescătoare $f'(x) < 0$ pe $(0, 2)$ și $(2, 6) \Rightarrow f(x)$ descrescătoare	1p 2p 1p 1p
c)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \cdot f(x) \right)^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-4x+4} \right)^{\frac{x^3}{2(x^2-4x+4)}}$ nedeterminată 1^∞ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4(x-1)}{(x-2)^2} \right)^{\frac{4(x-1)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x^3}{2(x-2)^2}}$ notat L $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-1)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x^3}{2(x-2)^2} = 2$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \cdot f(x) \right)^{f(x)} = e^2$	1p 2p 1p 1p
2. a)	$\int_1^2 \frac{x-1}{x+2} dx = \int_1^2 dx - 3 \int_1^2 \frac{dx}{x+2}$ $\int_1^2 f(x) dx = x \Big _1^2 - 3 \ln x+2 \Big _1^2$ $\int_1^2 f(x) dx = 1 + \ln \frac{27}{64}$	2p 2p 1p

b)	$\int_a^{a+1} f(x) dx = x \Big _a^{a+1} - 3 \ln x+2 \Big _a^{a+1}$ $1 - 3 \ln \frac{a+3}{a+2} = 1 - 3 \ln \frac{5}{4}$ $\frac{a+3}{a+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 2$	2p
		2p
		1p
c)	Se pune în evidență monotonia funcției f $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ strict crescătoare}$ $f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow \text{integrând relația } 0 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{1}{4}$	1p
		2p
		2p