REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

IULIE 2014

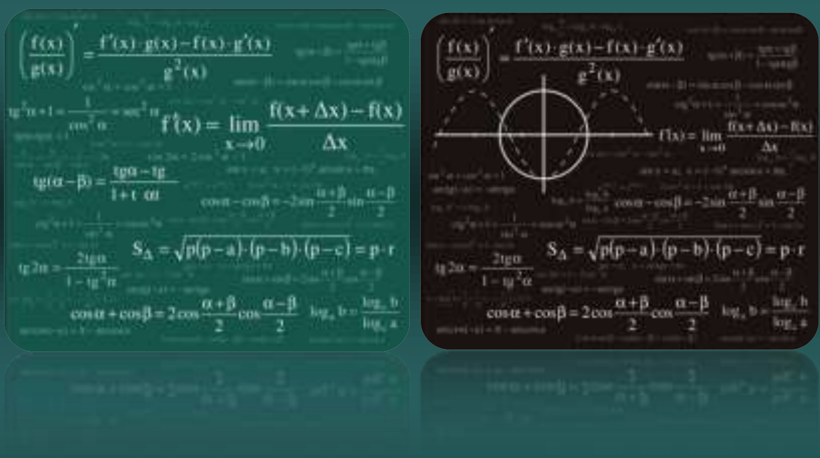
REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

DE PESTE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro





Articole :

# 1. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA L250 DIN RECREAŢII MATEMATICE NR. 2/2013

**de Roxana Mihaela Stanciu, Buzău și Nela Ciceu, Roșiori, Bacău**

Dorim să prezentăm două soluţii, diferite de cea publicată în RecMat 1/2014, pentru următoarea problemă:

''Stabiliţi pentru care dintre numerele 1, 2, ..., 9 este adevărată egalitatea

$$tg\frac{\pi}{n}-tg\frac{2\pi}{n}+tg\frac{4\pi}{n}=\sqrt{3n}\text{.''}$$

*Ionel Tudor*

Vom demonstra de fapt că avem relaţia:

$$tg\frac{\pi}{9}-tg\frac{2\pi}{9}+tg\frac{4\pi}{9}=3\sqrt{3}\,.$$

Pentru comoditatea scrierii, vom folosi gradele sexagesimale.

**Soluţia 1.** Avem:

$$tg20^0-tg40^0+tg80^0=\frac{\sin 20^0}{\cos 20^0}+\frac{\sin 80^0}{\cos 80^0}-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=$$

$$=\frac{\sin 100^0}{\cos 20^0\cos 80^0}-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{\cos 10^0\cdot 2\cos 10^0}{2\sin 10^0\cos 10^0\cos 20^0}-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=$$

$$=\frac{4\cos^2 10^0}{\sin 40^0}-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{4\cos^2 10^0\cos 40^0-\sin^2 40^0}{\sin 40^0\cos 40^0}=$$

$$=\frac{8\cos^2 10^0\cos 40^0-2\sin^2 40^0}{\sin 80^0}=\frac{4(1+\cos 20^0)\cos 40^0-(1-\cos 80^0)}{\cos 10^0}=$$

$$=\frac{4\cos 40^0+4\cos 20^0\cos 40^0-1+\cos 80^0}{\cos 10^0}=$$

$$=\frac{4\cos 40^0+2\cos 60^0+2\cos 20^0-1+\cos 80^0}{\cos 10^0}=\frac{4\cos 40^0+2\cos 20^0+\cos 80^0}{\cos 10^0}=$$

$$=\frac{3\cos 40^0+2\cos 20^0+\cos 40^0+\cos 80^0}{\cos 10^0}=\frac{3\cos 40^0+2\cos 20^0+2\cos 60^0\cos 20^0}{\cos 10^0}=$$

$$=\frac{3\cos 40^0+3\cos 20^0}{\cos 10^0}=\frac{6\cos 30^0\cos 10^0}{\cos 10^0}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$$

**Soluţia 2.** Folosim un rezultat al lui *Gauss*, inclus în Secţiunea VII din ''Disquisitiones Arithmeticae'' şi anume:

''Fie $n>1$ un număr impar şi $\omega=\frac{2k\pi}{n}$, unde $k=1,2,...,n-1$. Atunci

$$tg\omega=2[\sin 2\omega-\sin 4\omega+\sin 6\omega-...\mp\sin((n-1)\omega)]\text{''}.$$

Pentru $n=9$ şi $k=8,2,4$ obţinem :

$$tg 20^0=-tg 60^0=-2[\sin 320^0-\sin 640^0+\sin 960^0-\sin 1280^0]$$

$$-tg 40^0=-2[\sin 80^0-\sin 160^0+\sin 240^0-\sin 320^0]$$

$$tg 80^0=2[\sin 160^0-\sin 320^0+\sin 480^0-\sin 640^0].$$

Reducând toate unghiurile la primul cadran, rezultă că

$$tg 20^0-tg 40^0+tg 80^0=2(\sin 40^0-\sin 80^0+\sin 60^0-\sin 20^0-\sin 80^0+\sin 20^0+$$

$$+\sin 60^0-\sin 40^0+\sin 20^0+\sin 40^0+\sin 60^0+\sin 80^0)=$$

$$=2(3\sin 60^0+\sin 20^0+\sin 40^0-\sin 80^0)=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sin 20^0-2\sin 20^0\cos 60^0\right)=$$

$$=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sin 20^0-\sin 20^0\right)=3\sqrt{3}.$$

## 2.ŞIRURI DE ARII DE SUPRAFEŢE TRAPEZOIDALE ( II )

Prof. Văcărean Sorina, Colegiul Naţional „George Bariţiu”, Cluj-Napoca

$\boxed{2.}$ Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Lungimile bazei mari, bazei mici şi înălţimii, exprimate în $u$, sunt $a$, $b$ şi $h$. Fie $A_1 \in (DA)$, $B_1 \in (CB)$ astfel încât $\frac{DA_1}{DA} = \frac{CB_1}{CB} = \frac{p}{q}$, $A_2 \in (A_1A)$, $B_2 \in (B_1B)$ astfel încât $\frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{p}{q}$, $A_3 \in (A_2A)$, $B_3 \in (B_2B)$ astfel încât $\frac{A_2A_3}{A_2A} = \frac{B_2B_3}{B_2B} = \frac{p}{q}$, ..., $A_n \in (A_{n-1}A)$, $B_n \in (B_{n-1}B)$ astfel încât $\frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}A} = \frac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}B} = \frac{p}{q}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, unde $A_0 = D$ şi $B_0 = C$. Se notează cu $s_i$ aria suprafeţei patrulaterului $ABB_iA_i$, $i \in \mathbb{N}$, cu $t_j$ aria suprafeţei patrulaterului $CDA_jB_j$, $j \in \mathbb{N}^*$ şi cu $v_m$ aria suprafeţei patrulaterului $A_mB_mB_{m+1}A_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}^*$, exprimate în $u^2$.

a) Calculaţi $l_n$ în funcţie de $a$ şi $b$, unde $l_n = A_nB_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

c) Calculaţi $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i$.

d) Arătaţi că $l_n^2 > l_{n-1} \cdot l_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Calculaţi $h_n$ în funcţie de $h$, $h_n = A_nE_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $A_nE_n \perp AB$, $E_n \in (AB)$ şi $E_0 = E$.

f) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$.

g) Arătaţi că $h_n^2 = h_{n-1} \cdot h_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

h) Calculaţi $s_n$ în funcţie de $a$, $b$ şi $h$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

j) Arătaţi că $s_n^2 > s_{n-1} \cdot s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

k) Calculaţi $t_n$ în funcţie de $a$, $b$ şi $h$, $n \in \mathbb{N}^*$.

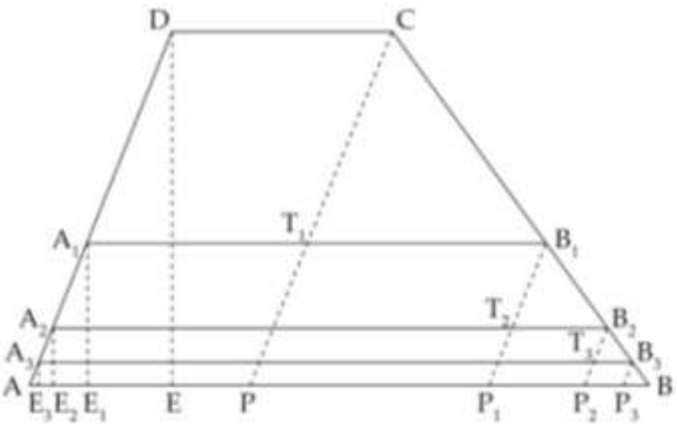
l) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} t_n$.

m) Calculaţi $v_n$ în funcţie de $a$, $b$ şi $h$, $n \in \mathbb{N}^*$.

n) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} v_n$.

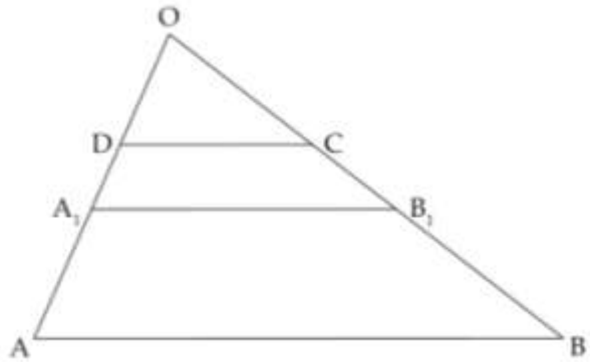
o) Arătaţi că $v_n^{\,2} > v_{n-1} \cdot v_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Rezolvare:




a) 1) Arătăm că $A_iB_i \parallel AB$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Arătăm că $A_1B_1 \parallel AB$.




Fie $\{O\} = AD \cap BC$. În $\triangle OAB$, $DC \parallel AB$, de unde, pe baza teoremei lui Thales, avem

$$\frac{OD}{DA} = \frac{OC}{CB}.\ \frac{OD}{DA} = \frac{OC}{CB} \Big|: \frac{p}{q},\ p, q \neq 0 \Leftrightarrow \frac{OD}{\frac{p}{q}DA} = \frac{OC}{\frac{p}{q}CB} \Leftrightarrow \frac{OD}{DA_1} = \frac{OC}{CB_1}.$$

În $\triangle OA_1B_1$, $\frac{OD}{DA_1} = \frac{OC}{CB_1}$, de unde, pe baza reciprocei teoremei lui Thales, avem $DC \parallel A_1B_1$ şi cum $DC \parallel AB$, rezultă că $A_1B_1 \parallel AB$.

Urmând acelaşi raţionament, $A_2B_2 \parallel AB$, $A_3B_3 \parallel AB$, $A_4B_4 \parallel AB$, …, $A_nB_n \parallel AB$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2) Fie $B_iP_i \parallel DA$, $P_i \in AB$ şi $\{T_{i+1}\} = A_{i+1}B_{i+1} \cap B_iP_i$, $i \in \mathbb{N}$, unde $P_0 = P$. Având laturile opuse paralele, patrulaterele $AP_iB_iA_i$ sunt paralelograme, de unde $[AP_i] \equiv [A_iB_i]$ şi de aici $AP_i = l_i$, $i \in \mathbb{N}$. Având laturile opuse paralele, patrulaterele $A_{i+1}T_{i+1}B_iA_i$ sunt paralelograme, de unde $[A_{i+1}T_{i+1}] \equiv [A_iB_i]$ şi de aici $A_{i+1}T_{i+1} = l_i$, $i \in \mathbb{N}$.

3) Arătăm că $T_{i+1}B_{i+1} = \frac{p}{q}P_iB$, $i \in \mathbb{N}$.

Arătăm că $T_1B_1 = \frac{p}{q}PB$.

În $\triangle CPB$, $T_1B_1 \parallel PB$, de unde, pe baza teoremei fundamentale a asemănării, rezultă că $\triangle CT_1B_1 \sim \triangle CPB$ şi de aici $\frac{T_1B_1}{PB} = \frac{CB_1}{CB}$. Cum $\frac{CB_1}{CB} = \frac{p}{q}$, avem $\frac{T_1B_1}{PB} = \frac{p}{q}$, de unde $T_1B_1 = \frac{p}{q}PB$.

Urmând acelaşi raţionament, $T_2B_2 = \frac{p}{q}P_1B$, $T_3B_3 = \frac{p}{q}P_2B$, $T_4B_4 = \frac{p}{q}P_3B$, …, $T_nB_n = \frac{p}{q}P_{n-1}B$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4) Calculăm $l_{i+1}$ în funcţie de $l_i$, $i \in \mathbb{N}$, utilizând rezultatele de la 2) şi 3).

$$l_{i+1} = A_{i+1}B_{i+1} = A_{i+1}T_{i+1} + T_{i+1}B_{i+1} = A_iB_i + \frac{p}{q}P_iB =$$

$$= l_i + \frac{p}{q}(AB - AP_i) = l_i + \frac{p}{q}(a - l_i) = \frac{pa + (q-p)l_i}{q}.$$

$$l_{i+1}=\frac{pa+(q-p)l_i}{q},\ i\in\mathbb{N}.$$

5) Calculăm $l_1$ în funcţie de $a$ şi $b$.

$$l_1=\frac{pa+(q-p)l_0}{q}=\frac{pa+(q-p)b}{q}.$$

6) Calculăm $l_2$ în funcţie de $a$ şi $b$.

$$l_2=\frac{pa+(q-p)l_1}{q}=\frac{pa+(q-p)\cdot\dfrac{pa+(q-p)b}{q}}{q}=\frac{pqa+(q-p)pa+(q-p)^2b}{q^2}=$$
$$=\frac{(2pq-p^2)a+(q-p)^2b}{q^2}.$$

7) Calculăm $l_3$ în funcţie de $a$ şi $b$.

$$l_3=\frac{pa+(q-p)l_2}{q}=\frac{pa+(q-p)\cdot\dfrac{(2pq-p^2)a+(q-p)^2b}{q^2}}{q}=$$
$$=\frac{pq^2a+(q-p)(2pq-p^2)a+(q-p)^3b}{q^3}=\frac{(3pq^2-3p^2q+p^3)a+(q-p)^3b}{q^3}.$$

8) Deducem formula pentru $l_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Cum $l_1=\dfrac{\left[q^1-(q-p)^1\right]a+(q-p)^1b}{q^1}$, $l_2=\dfrac{\left[q^2-(q-p)^2\right]a+(q-p)^2b}{q^2}$,

$l_3=\dfrac{\left[q^3-(q-p)^3\right]a+(q-p)^3b}{q^3}$, presupunem că $l_n=\dfrac{\left[q^n-(q-p)^n\right]a+(q-p)^nb}{q^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$l_n=\frac{q^na-(q-p)^na+(q-p)^nb}{q^n}=\frac{q^na}{q^n}+\frac{(q-p)^n(b-a)}{q^n}=a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a).$$

Vrem să arătăm că:

$$(7)\quad l_n=a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a),\ n\in\mathbb{N}.$$

9) Demonstrăm propoziţia $(7)$ prin inducţie matematică.

Etapa de verificare: Pentru $n=1$ propoziţia $l_1=\dfrac{pa+(q-p)b}{q}$ este adevărată, conform celor arătate la 4) şi 5).

Etapa de demonstraţie: Presupunem că propoziţia $(7)$ este adevărată. Vrem să arătăm că $l_{n+1}=a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}(b-a)$, $n\in\mathbb{N}$.

Din 4) şi din ipoteza de inducţie rezultă că:

$$l_{n+1}=\frac{pa+(q-p)l_n}{q}=\frac{pa+(q-p)\left[a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a)\right]}{q}=$$

$$=\frac{qa}{q}+\frac{q-p}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a)=a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}(b-a),$$ ceea ce trebuia dovedit.

Verificarea şi demonstraţia fiind efectuate, rezultă că propoziţia $(7)$ este adevărată.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a)\right]=a+0\cdot(b-a)=a$.

c) $$\sum_{i=0}^{n}l_i=\sum_{i=0}^{n}\left[a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^i(b-a)\right]=a\sum_{i=0}^{n}1+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{q-p}{q}\right)^i=$$

$$=a(n+1)+(b-a)\cdot\frac{1-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}}{1-\frac{q-p}{q}}=a(n+1)+(b-a)\frac{q}{p}\left[1-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}\right].$$

d) $l_n=a+(b-a)\left(\frac{q-p}{q}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Notăm $b-a=c$, $c<0$ şi $\frac{q-p}{q}=r$. Cu aceste notaţii exprimăm $l_n$, $l_{n-1}$ şi $l_{n+1}$ astfel: $l_n=a+cr^n$, $l_{n-1}=a+cr^{n-1}$, $l_{n+1}=a+cr^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din

propoziţia $(2)$, demonstrată în studiul „Şiruri de arii de suprafeţe trapezoidale ( I )", apărut în Revista Mateinfo.ro din mai 2014, în ale cărei condiţii ne aflăm, rezultă că $l_n^2>l_{n-1}\cdot l_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

e) $A_iE_i\perp AB$, $i\in\mathbb{N}$, de unde $A_iE_i\parallel A_{i-1}E_{i-1}$, $i\in\mathbb{N}^*$. În $\triangle AA_{i-1}E_{i-1}$, $A_iE_i\parallel A_{i-1}E_{i-1}$, de unde, pe baza teoremei fundamentale a asemănării, rezultă că $\triangle AA_iE_i\sim\triangle AA_{i-1}E_{i-1}$ şi de aici

$\dfrac{A_iE_i}{A_{i-1}E_{i-1}}=\dfrac{AA_i}{AA_{i-1}}$. Cum $\dfrac{AA_i}{AA_{i-1}}=\dfrac{q-p}{q}$, avem $\dfrac{A_iE_i}{A_{i-1}E_{i-1}}=\dfrac{q-p}{q}$, de unde $A_iE_i=\dfrac{q-p}{q}A_{i-1}E_{i-1}$ şi de aici $h_i=\dfrac{q-p}{q}h_{i-1}$, $i\in\mathbb{N}^*$. Avem astfel: $h_1=\dfrac{q-p}{q}h_0=\dfrac{q-p}{q}h$,

$h_2=\dfrac{q-p}{q}h_1=\dfrac{q-p}{q}\cdot\dfrac{q-p}{q}h=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^2h$, $h_3=\dfrac{q-p}{q}h_2=\dfrac{q-p}{q}\cdot\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^2h=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^3h$.

Cum $h_1=\dfrac{q-p}{q}h$, $h_2=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^2h$, $h_3=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^3h$, presupunem că:

$$(8)\quad h_n=\left(\frac{q-p}{q}\right)^n h,\ n\in\mathbb{N}.$$

Demonstrăm propoziţia $(8)$ prin inducţie matematică.

Etapa de verificare: Pentru $n=1$ propoziţia $h_1=\dfrac{q-p}{q}h$ este adevărată.

Etapa de demonstraţie: Presupunem că propoziţia $(8)$ este adevărată. Vrem să arătăm că $h_{n+1}=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^{n+1}h$, $n\in\mathbb{N}$, unde $h_{n+1}=A_{n+1}E_{n+1}$. Din $A_{n+1}E_{n+1}=\dfrac{q-p}{q}A_nE_n$ şi din ipoteza de inducţie rezultă că $h_{n+1}=\dfrac{q-p}{q}h_n=\dfrac{q-p}{q}\cdot\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^n h=\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^{n+1}h$, ceea ce trebuia dovedit.

Verificarea şi demonstraţia fiind efectuate, rezultă că propoziţia $(8)$ este adevărată.

La propoziţia $(8)$ se poate ajunge şi utilizând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $h_n=\dfrac{q-p}{q}h_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $h_0>0$, caz în care nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{q-p}{q}\right)^n h=0\cdot h=0$.

g) Metoda I:

$$h_{n-1}\cdot h_{n+1}=\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n-1}h\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}h=\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}h^2=\left[\left(\frac{q-p}{q}\right)^n h\right]^2=h_n^{\ 2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Metoda a II-a: Aplicând formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem:

$$h_{n+1}\cdot h_{n-1}=\frac{q-p}{q}h_n\cdot h_{n-1}=\frac{q-p}{q}h_{n-1}\cdot h_n=h_n\cdot h_n=h_n^{\ 2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

h) $s_n=A_{ABB_nA_n}=\frac{\left(AB+A_nB_n\right)\cdot A_nE_n}{2}=\left(a+l_n\right)\cdot h_n\cdot\frac{1}{2}=$

$$=\left[a+a+\left(\frac{q-p}{q}\right)^n(b-a)\right]\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n\cdot\frac{h}{2}=ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}.$$

$$(9)\quad s_n=ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Propoziţia $(9)$ nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece $s_n$ s-a calculat pe baza propoziţiilor $(7)$ şi $(8)$, demonstrate la a) şi e).

i) $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}\right]=0.$

j) $s_n=ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$. Notăm $ah=d$, $d>0$, $\frac{(b-a)h}{2}=e$, $e<0$ şi $\frac{q-p}{q}=r$. Cu aceste notaţii demonstraţia este cea din problema $\boxed{1.}$ j) din studiul „Şiruri de arii de suprafeţe trapezoidale ( I )”, apărut în Revista Mateinfo.ro din mai 2014.

k) $t_n=A_{CDA_nB_n}=A_{ABCD}-A_{ABB_nA_n}=s_0-s_n$, de unde:

$$(10)\quad t_n=\frac{(a+b)h}{2}-ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n-\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Propoziţia $(10)$ nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece $t_n$ s-a calculat folosind propoziţia $(9)$.

l) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(a+b)h}{2}-ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^n-\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}\right]=\frac{(a+b)h}{2}.$

m) $v_n=A_{A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}}=A_{ABB_nA_n}-A_{ABB_{n+1}A_{n+1}}=s_n-s_{n+1}=$

$$=ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}-ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n+1}-\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n+2}=$$

$$=ah\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}\left(1-\frac{q-p}{q}\right)+\frac{(b-a)h}{2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}\left(1-\frac{q^2-2pq+p^2}{q^2}\right)=$$

$$=\frac{pah}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}+\frac{(2pq-p^2)(b-a)h}{2q^2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}.$$

$$(11)\quad v_n=\frac{pah}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}+\frac{(2pq-p^2)(b-a)h}{2q^2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Propoziţia $(11)$ nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece $v_n$ s-a calculat folosind propoziţia $(9)$.

n) $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{pah}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}+\frac{(2pq-p^2)(b-a)h}{2q^2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}\right]=0$.

o) $v_n=\frac{pah}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{n}+\frac{(2pq-p^2)(b-a)h}{2q^2}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)^{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm $\frac{pah}{q}=f$, $f>0$, $\frac{(2pq-p^2)(b-a)h}{2q^2}=g$, $g<0$ şi $\frac{q-p}{q}=r$. Cu aceste notaţii demonstraţia este cea din problema $\boxed{1.}$ o) din studiul „Şiruri de arii de suprafeţe trapezoidale ( I )", apărut în Revista Mateinfo.ro din mai 2014.

## 3.PROBLEME INTERESANTE CU PROGRESII

Prof. Ciobîcă C Constantin, prof. Ciobîcă Elena
Colegiul Vasile Lovinescu Fălticeni

PROBLEMA 1

1. Fie familiile de puncte $A_n(2n+1, n^2+2n), B_n(4n+3, 2n^2+5n), C_n(6n+5, 3n^2+8n), n \in N^*$. Să se arate că punctele $A_n, B_n, C_n$ sunt coliniare $\forall n \in N^*$.
2. Fie $(a_n)_{n\in N^*} \in R$ un şir în progresie aritmetică de raţie $r \in R^*$ şi punctele $A_n(a_n, S_n), B_n(a_{n+1}, S_{n+1}), C_n(a_{n+2}, S_{n+2}), n \in N^*$. Să se arate că

$$A_{\Delta A_n B_n C_n} = \frac{r^2}{2} um^2$$

Rezolvare:

1. Punctele sunt coliniare dacă: $\begin{vmatrix} x_{A_n} & Y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & Y_{C_n} & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2n+1 & n^2+2n & 1 \\ 4n+3 & 2n^2+5n & 1 \\ 6n+5 & 3n^2+8n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & n^2+2n & 1 \\ 2n+2 & n^2+3n & 0 \\ 4n+4 & 2n^2+6n & 0 \end{vmatrix} = 0$$, liniile 2şi 3 fiind proporţionale.

2. $a_i \in R, \forall i \quad si \quad A_{\Delta A_n B_n C_n} = \frac{|\Delta|}{2} um^2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{A_n} & Y_{A_n} & 1 \\ x_{B_n} & Y_{B_n} & 1 \\ x_{C_n} & Y_{C_n} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_n & S_n & 1 \\ a_{n+1} & S_{n+1} & 1 \\ a_{n+2} & S_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & S_n & 1 \\ a_{n+1}-a_n & S_{n+1}-S_n & 0 \\ a_{n+2}-a_n & S_{n+2}-S_n & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r & a_{n+1} \\ 2r & a_{n+2}+a_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & a_{n+1} \\ r & a_{n+2} \end{vmatrix} = r(a_{n+2}-a_{n+1}) = r^2 \Rightarrow A = \frac{r^2}{2} um^2$$

PROBLEMA 2

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir în progresie aritmetică atunci demonstraţi egalitatea:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{i+1}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{i+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{i+2}} + \ldots + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}} = \frac{n+1}{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}}, \forall n \in N$$

Rezolvare:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \frac{2a_1 k + k^2 r - kr}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i+1} = a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i - a_1 = \frac{2a_1 k + k^2 r + kr}{2}$$

Rezultă: $$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{i+1}} = \frac{1}{kr}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{i+1}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i+2} = a_3 + a_4 + \ldots + a_{k+2} = \sum_{i=1}^{k+2} a_i - a_1 - a_2 = \frac{2a_1 k + k^2 r + 3kr}{2}$$

Rezultă: $$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{i+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{i+2}} = \frac{1}{kr}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{i+1}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{i+2}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{n+i} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+k}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$
$$= \frac{2a_1 k + 2krn + k^2 r - kr}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+k+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+k+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) =$$
$$= \frac{2a_1 k + 2krn + k^2 r + kr}{2}$$

Rezultă: $\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}} = \frac{1}{kr}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}}\right)$

Rezultă: $S = \frac{1}{kr}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i}{kr \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}} = \frac{n+1}{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{n+i+1}}$

PROBLEMA 3

Fie $(a_n)_{n\in N^*}$ un sir de numere reale in progresie aritmetica. Demonstrati:

1. $$\frac{1}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)} + \frac{1}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)} + \ldots + \frac{1}{(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}+a_{n+2})} = \\ = \frac{n}{(a_1+a_2)(a_{n+1}+a_{n+2})}, \forall n \in N^*$$
2. $$\frac{1}{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)} + \frac{1}{(a_2+a_3+a_4)(a_3+a_4+a_5)} + \ldots + \\ + \frac{1}{(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})} = \frac{n}{(a_1+a_2+a_3)(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})}, \forall n \in N^*$$

Prof. Ciobica Constantin, prof. Ciobîcă Elena

Colegiul Vasile Lovinescu Fălticeni

Rezolvare:

1. $a_k = a_1 + (k-1)r$, $a_{k+1} = a_1 + kr$, $a_{k+2} = a_1 + (k+1)r$

$$\frac{1}{(a_k + a_{k+1})(a_{k+1}+a_{k+2})} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_k + a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}+a_{k+2}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)}+\frac{1}{(a_2+a_3)(a_3+a_4)}+\ldots+\frac{1}{(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}+a_{n+2})}=$$

$$=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{2\cdot a_1+2nr+r-2a_1-r}{2r\cdot(a_1+a_2)(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{n}{(a_1+a_2)(a_{n+1}+a_{n+2})}$$

2. $a_k=a_1+(k-1)r$, $a_{k+1}=a_1+kr$, $a_{k+2}=a_1+(k+1)r$, $a_{k+3}=a_1+(k+2)r$

$$\frac{1}{(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})(a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})}=\frac{1}{3r}\left(\frac{1}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}}-\frac{1}{a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)}+\frac{1}{(a_2+a_3+a_4)(a_3+a_4+a_5)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})}=$$

$$=\frac{1}{3r}\left(\frac{1}{a_1+a_2+a_3}-\frac{1}{a_2+a_3+a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3r}\left(\frac{1}{a_1+a_2+a_3}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}}\right)=\frac{3a_1+3nr+3r-3a_1-3r}{3r\cdot(a_1+a_2+a_3)(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})}.$$