Revista Electronică Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 – Decembrie 2011
www.mateinfo.ro

PROGRESII ARITMETICE CU PĂTRATE PERFECTE ŞI NUMERE TRIUNGHIULARE

ROXANA MIHAELA STANCIU[1]

Începem prin a arăta că există o infinitate de pătrate perfecte care sunt simultan şi numere triunghiulare(se numeşte număr triunghiular un număr de forma $\frac{t(t+1)}{2}, t \in N^*$).

Deci, trebuie să găsim numerele naturale n astfel încât $n = s^2 = \frac{t(t+1)}{2}, s \in N^*, t \in N^*$.

Avem $s^2 = \frac{t(t+1)}{2} \Leftrightarrow t^2 + t = 2s^2$, care prin înmulţire cu 4 la care adăugăm 1, se ajunge la : $(2t+1)^2 - 2(2s)^2 = 1$ .Substituim $x = 2t+1, y = 2s$, în ultima ecuaţie şi ajungem la ecuaţia *Pell* : $x^2 - 2y^2 = 1$[2], care are o infinitate de soluţii.

După ce găsim x şi y, se calculează $t = \frac{x-1}{2}$ şi $s = \frac{y}{2}$.Deci avem o infinitate de numere pătrate perfecte care sunt şi numere triunghiulare.

Primele 4 soluţii sunt:

1) $x = 3, y = 2, s = 1, t = 1, n = 1$;
2) $x = 17, y = 12, s = 6, t = 8, n = 36$;
3) $x = 99, y = 70, s = 35, t = 49, n = 1225$;
4) $x = 577, y = 408, s = 204, t = 288, n = 41616$.

Propoziţia 1.
Nu există trei numere naturale pătrate perfecte, în progresie aritmetică, cu raţia progresiei pătrat perfect.

---

[1] Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Balas Söter" Buzău

[2] Ecuaţiile diofantice de tipul $x^2 - ny^2 = 1$ au fost numite ecuaţii *Pell* de către *Euler* în mod eronat, care a făcut o confuzie cu Lord *Brouncker* (vezi link-ul: http://en.wikipedia.org/wiki/Lord_Brouncker), primul matematician european care a găsit o metodă de determinare a soluţiei generale pentru ecuaţia de mai sus.Primul matematician care a rezolvat ecuaţia de mai sus a fost însă matematicianul Indian *Brahmagupta*(în anul 628).Metoda descoperită de *Brahmagupta* a fost tradusă în arabă(în anul 773) şi latină(în anul 1126) Însă ecuaţia $x^2 - 2y^2 = 1$ a fost studiată în acelaşi timp în Grecia şi India mult mai devreme în timpul lui *Pitagora*.

Demonstraţie.
Problema găsirii a trei numere naturale pătrate perfecte, în progresie aritmetică, cu raţia progresiei pătrat perfect a fost propusă de *Fermat*(a se vedea [1])
$\div x^2, y^2, z^2 \Rightarrow (*) x^2 + z^2 = 2y^2, x < y < z \Rightarrow x, z =$ impare.
Avem:
$x = p - q, z = p + q,$ unde p şi q sunt relative prime de paritate diferită, cu

$$p^2 + q^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = m^2 - n^2 \\ q = 2mn \\ y = m^2 + n^2 \end{cases}, \text{unde } (m,n) = 1 \text{ şi de paritate diferită.}$$

Deci, soluţia ecuaţiei (*) este:

$$(**) \begin{cases} x = \left| m^2 - n^2 - 2mn \right| \\ y = m^2 + n^2 \\ z = m^2 - n^2 + 2mn \end{cases}, \text{ unde } (m,n) = 1 \text{ şi de paritate diferită.}$$

Raţia progresiei este $r = y^2 - x^2 = 4mn(m^2 - n^2) \neq p.p$.
Expresia $4mn(m^2 - n^2)$ nu poate fi pătrat perfect deoarece $mn(m^2 - n^2)$ nu este pătrat perfect. Deci problema pusă de *Fermat* nu are soluţie.
Remarca 1. Nu există triunghiuri pitagoreice cu aria pătrat perfect(triunghiurile pitagoreice au laturile $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ şi aria $= mn(m^2 - n^2)$, care nu este pătrat perfect).
Propoziţia 2.
Există trei numere triunghiulare, în progresie aritmetică, cu raţia progresiei număr triunghiular.
Demonstraţie.
Problema găsirii a trei numere triunghiulare, în progresie aritmetică, cu raţia progresiei număr triunghiular, a fost pusă şi rezolvată de către *K.R.S. Sastry*(a se vedea [2]).
Lema 1. Dacă $\div a, b, c$ cu raţia r, atunci $\div 8a + 1, 8b + 1, 8c + 1$ cu raţia $8r$.
Exemplu. $\div 2,7,12$ are raţia 5 iar $\div 17,57,97$ are raţia 40.
Demonstraţia lemei 1. o lăsăm pe seama cititorului.
Lema 2. Dacă $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, atunci $8t_n + 1$ este pătrat perfect.
*Demonstraţie.*Se observă că $8t_n + 1 = (2n+1)^2$, număr impar pătrat perfect.
Lema 3. Dacă $\div \dfrac{a(a+1)}{2}, \dfrac{b(b+1)}{2}, \dfrac{c(c+1)}{2}$ cu raţia r, atunci
$\div (2a+1)^2, (2b+1)^2, (2c+1)^2$ cu raţia $8r$.
*Demonstraţie.*Rezultă uşor din lema 1. şi lema 2.
Dacă notăm:

$2a+1=A, 2b+1=B, 2c+1=C$ şi $t_a=\frac{a(a+1)}{2}, t_b=\frac{b(b+1)}{2}, t_c=\frac{c(c+1)}{2}$, şi considerăm progresia aritmetică $\div t_a, t_b, t_c$, atunci conform lemei 3. numerele A^2, B^2, C^2 sunt tot în progresie aritmetică.

Din (**) avem că: $\begin{cases} A=\left|m^2-n^2-2mn\right| \\ B=m^2+n^2 \\ C=m^2-n^2+2mn \end{cases}$, unde $(m,n)=1$ şi de paritate diferită.

Raţia progresiei $\div A^2, B^2, C^2$ este egală cu $4mn(m^2-n^2)$ şi din lema 3. se obţine că raţia progresiei $\div t_a, t_b, t_c$ este de opt ori mai mică, adică este egală cu $\frac{mn(m^2-n^2)}{2}$.

Pentru ca $\frac{mn(m^2-n^2)}{2}$ să fie număr triunghiular avem două cazuri:

Cazul I. $m^2-n^2=mn+1 \Leftrightarrow (2m-n)^2-5n^2=4$.

Din relaţiile :

$\begin{cases} L_{2k}^2-5F_{2k}^2=4 \\ L_{2k}=2F_{2k+1}-F_{2k} \end{cases}, k=1,2,\ldots$, rezultă că $m=F_{2k+1}=2,5,13,\ldots$ şi $n=F_{2k}=1,3,8,\ldots$

Cazul II. $m^2-n^2=mn-1 \Leftrightarrow (2m-n)^2-5n^2=-4$

Deoarece $L_{2k-1}^2-5F_{2k-1}^2=-4, k=1,2,3,\ldots$, rezultă că $m=F_{2k}=1,3,8,\ldots$ şi $n=F_{2k-1}=1,2,5,\ldots$.

În continuare vom exprima termenii progresiei $\div t_a, t_b, t_c$ în funcţie de parametrii m respectiv n găsiţi mai sus.

Avem:

$$\begin{cases} 2a+1=A \\ 2b+1=B \\ 2c+1=C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{A-1}{2}=\frac{\left|m^2-n^2-2mn\right|-1}{2} \\ b=\frac{B-1}{2}=\frac{m^2+n^2-1}{2} \\ c=\frac{C-1}{2}=\frac{m^2-n^2+2mn-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_a=\frac{a(a+1)}{2}=\frac{A^2-1}{8}=\frac{(m^2-n^2-2mn)^2-1}{8} \\ t_b=\frac{b(b+1)}{2}=\frac{B^2-1}{8}=\frac{(m^2+n^2)^2-1}{8} \\ t_c=\frac{c(c+1)}{2}=\frac{c^2-1}{8}=\frac{(m^2-n^2+2mn)^2-1}{8} \end{cases}.$$

Observaţia 1. Dacă se aleg ca parametri m şi n cu aceiaşi paritate numerele a, b şi c nu sunt naturale.
Se obţin numere triunghiulare cu raţia număr triunghiular şi numerele a, b şi c naturale dacă parametrii m şi n au parităţi diferite.
Exemplu numeric. Dacă alegem $m = 8, n = 5$ rezultă $A = 41, B = 89, C = 119, a = 20, b = 44, c = 59$ şi $\div t_a = 210, t_b = 990, t_c = 1770$ cu raţia $r = 780 = \frac{39 \cdot 40}{2} =$ număr triunghiular.
Din propoziţiile 1 şi 2 rezultă că ceea ce este imposibil pentru pătrate perfecte este posibil pentru numere triunghiulare.

Propoziţia 3.
Dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este o progresie aritmetică de numere naturale, de raţie r şi conţine pătratul perfect a^2, şi numărul triunghiular $P(t) = \frac{t(t+1)}{2}$,atunci $(a_n)_{n \geq 0}$ conţine o infinitate de pătrate perfecte, şi o infinitate de numere triunghiulare.

Demonstraţie.
În general, dacă o progresie aritmetică de raţie r conţine pătratul perfect a^2, atunci pentru orice număr natural n, termenul $a^2 + r(2an + n^2 d)$ este pătratul perfect $(a + rn)^2$.
Mai general, dacă progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 0}$ conţine un termen de forma $P(a)$, unde P este un polinom cu coeficienţi întregi, atunci
termenii $P(a) + r\left(\frac{P(a + nr) - P(a)}{r}\right) = P(a + nr)$ sunt de aceiaşi formă pentru orice număr natural n.
Din cele de mai sus avem:

- Deoarece $(a_n)_{n \geq 0}$ conţine pătratul perfect pătratul perfect a^2 , atunci conţine o infinitate de pătrate perfecte de forma $(a + rn)^2$;
- Deoarece $(a_n)_{n \geq 0}$ conţine numărul algebric de forma $P(t)$, conţine o infinitate de numere de aceiaşi formă , de exemplu numerele $P(t + nr)$ $(n \in N)$.

Remarca 2. Pătratele perfecte se pot obţine şi prin iterările următoare:

- dacă avem progresia aritmetică $a_n = x + rn$,de numere naturale, a.î. $\exists a \in N^*, \exists k \in N$ cu $a^2 = x + rn$, atunci $x + (k + 2a^2 + ra^2)r = x + kr + (r^2 + 2r)a^2 = a^2 + (r^2 + 2r)a^2 = [(r+1)a]^2$, este deasemeni pătrat perfect;
- dacă $r \geq 2$, prin aceiaşi metodă ca mai sus observăm că dacă $x + kr = a^2$, atunci $x + (k - 2a^2 + ra^2)r = [(r-1)a]^2$.Concluzia urmează prin iterare.

BIBLIOGRAFIE

[1] L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II, Chelsea, NY, (1971), pp.1-39, 435, 615-616.

[2] K.R.S. Sastry, *A Fermat-Fibonacci Collaboration*, Crux Mathematicorum, Vol. 23, No.5 (sept.1997), pp. 274-277.

PATRU PROBLEME INTERESANTE

NECULAI STANCIU[1]

Propoziția 1. Există o infinitate de funcţii polinomiale f astfel încât $f(p)$ este număr prim pentru orice număr prim p.(În legătură cu o problemă deschisă- GMB nr.6/2010, pag.286)

<u>*Demonstrație.*</u>Fie f o funcţie polinomială astfel încât $f(p)$ este număr prim pentru orice număr prim p.Vom arăta că f este constantă(constanta fiind desigur un număr prim) sau f este funcţia polinomială identică, adică $f(x)=x \quad \forall x \in Z$.Presupunem că f nu este funcţia identică.Atunci ecuaţia $f(x)=x$, are un număr finit de soluţii.Aşadar, există numerele prime p şi q, $p \neq q$ astfel încât $f(p)=q$.Din teorema lui Dirichlet, se ştie că progresia aritmetică $p+kq$, $(k=0,1,2,...)$conţine o infinitate de numere prime.În afară de aceasta, pentru orice $k \geq 0$ deoarece f este polinomială avem $f(p+kq) \equiv f(p) \equiv 0(\bmod q)$, şi astfel pentru o infinitate de numere prime r_i de forma $p+kq$ trebuie să avem $f(r_i)=q$.

Dar f fiind funcţie polinomială ia valoarea q de o infinitate de ori ceea ce înseamnă că $f(x)=q$ pentru orice x.

Propoziția 2. Dacă n este un număr natural şi A este mulţimea tuturor numerelor de forma $f(n)=n^2+n+1$, atunci $f(n)f(n+k) \in A$ dacă şi numai dacă $k=1$.

<u>*Demonstrație.*</u>Produsul (1) $f(n)f(n+k)=n^4+(2k+2)n^3+(k^2+3k+2)n+k^2+k+1$ este în A dacă şi numai dacă este de forma x^2+x+1 $(x \in N^*)$.Este evident că x trebuie să fie de forma $x=An^2+Bn+C$, unde $A,B,C \in N$.

Avem(2) $x^2+x+1=A^2n^4+2ABn^3+(B^2+2AC+A)n^2+B(2C+1)n+C^2+C+1$.

Din (1) şi (2) rezultă ecuaţiile:

$A^2=1,\ 2AB=2k+2,\ B^2+2AC+A=k^2+3k+3,\ B(2C+1)=k^2+3k+2$ şi

$C^2+C+1=k^2+k+1$.

Se obţin soluţiile:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=k+1 \\ C=k=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} A=-1 \\ B=-k-1 \\ C=k=-1 \end{cases}.$$

Deoarece, $k>0$, rezultă $k=1$.

Propoziția 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} tg\left(\frac{4k-3}{4n}\right)\pi = \sum_{k=0}^{n-1} tg\left(\frac{4k+1}{4n}\right)\pi = (-1)^{n+1}n$.

(În legătură cu articolul:"Generalizări ale unor formule trigonometrice", de *Marin Toloşi* şi *Maria Alecu*, din GMB, nr. 7-8-9/2010 – mai precis Consecinţa 5) – pag. 351)

<u>*Demonstrație.*</u>Avem: $tg(nx)=\dfrac{C_n^1 tgx - C_n^3 tg^3x + C_n^5 tg^5x - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^n tg^n x}{1 - C_n^2 tg^2x + C_n^4 tg^4x - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-1} tg^{n-1}x}$, dacă

$n=impar$ şi

[1] Profesor, Şcoala Generală "George Emil Palade", Buzău

$$tg(nx)=\frac{C_n^1 tgx - C_n^3 tg^3 x + C_n^5 tg^5 x - \ldots - (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{n-1} tg^{n-1} x}{1 - C_n^2 tg^2 x + C_n^4 tg^4 x - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^n tg^n x}$$, dacă $n = par$.

Considerăm ecuaţia (*) $tg(nx)=1$, cu are rădăcinile $x_k = \frac{(4k+1)\pi}{4n}$, $k=\overline{0,n-1}$, care se mai pot scrie $x_k = \frac{(4k-3)\pi}{4n}$, $k=\overline{1,n}$.Deci, noi trebuie să calculăm suma rădăcinilor ecuaţiei (*), adică $\sum_{k=1}^{n} tgx_k$.Pe de altă parte avem că $tg(nx)=\frac{P(tgx)}{Q(tgx)}=1$, are rădăcinile date de ecuaţia (**) $P(tgx)-Q(tgx)=0$, unde polinoamele $P(t)$ şi $Q(t)$ sunt date de:

$P(t)=C_n^1 t - C_n^3 t^3 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^n t^n$ şi $Q(t)=1-C_n^2 t^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-1} t^{n-1}$, dacă $n = impar$, iar dacă $n = par$ ultimii termeni din $P(t)$ şi $Q(t)$ sunt $-(-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{n-1} t^{n-1}$ respectiv $(-1)^{\frac{n}{2}} C_n^n t^n$.Deci, din relaţiile lui Viete pentru ecuaţia (**) avem că suma rădăcinilor este egală cu $n=(-1)^{n+1} n$, pentru $n = impar$; respectiv cu $-n=(-1)^{n+1} n$, pentru $n = par$.

Propoziția 4. Dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive astfel încât $xy+yz+zx=1$, atunci $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.(În legătură cu articolul "Asupra unor inegalităţi condiţionate"- GMB, nr. 7-8-9/2010, pag.365)

<u>*Demonstrație.*</u>Ipoteza ne permite să luăm $x = tg\frac{A}{2}$, $y = tg\frac{B}{2}$ şi $z = tg\frac{C}{2}$, unde A, B şi C sunt unghiurile unui triunghi.

Inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ este echivalentă cu:

$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, care are loc datorită concavităţii funcţiei $\cos$ pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, mai exact avem din inegalitatea lui *Jensen* că $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le 3\cos\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Calculul iterativ al radicalilor

În cele ce urmează vom aborda următoarele teme:

1. Calculul iterativ al lui $\sqrt[5]{a}$ când $0 < a < 1$.
2. Calculul iterativ al lui $\sqrt[N]{a}$ când $0 < a < 1$.

Tema 2.este o generalizare naturală a temei 1 pentru orice N>1.

1.Calculul iterativ al lui $\sqrt[5]{a}$ când $0 < a < 1$

De unde vine ideea ? Pentru aceasta facem câteva consideraţii geometrice :

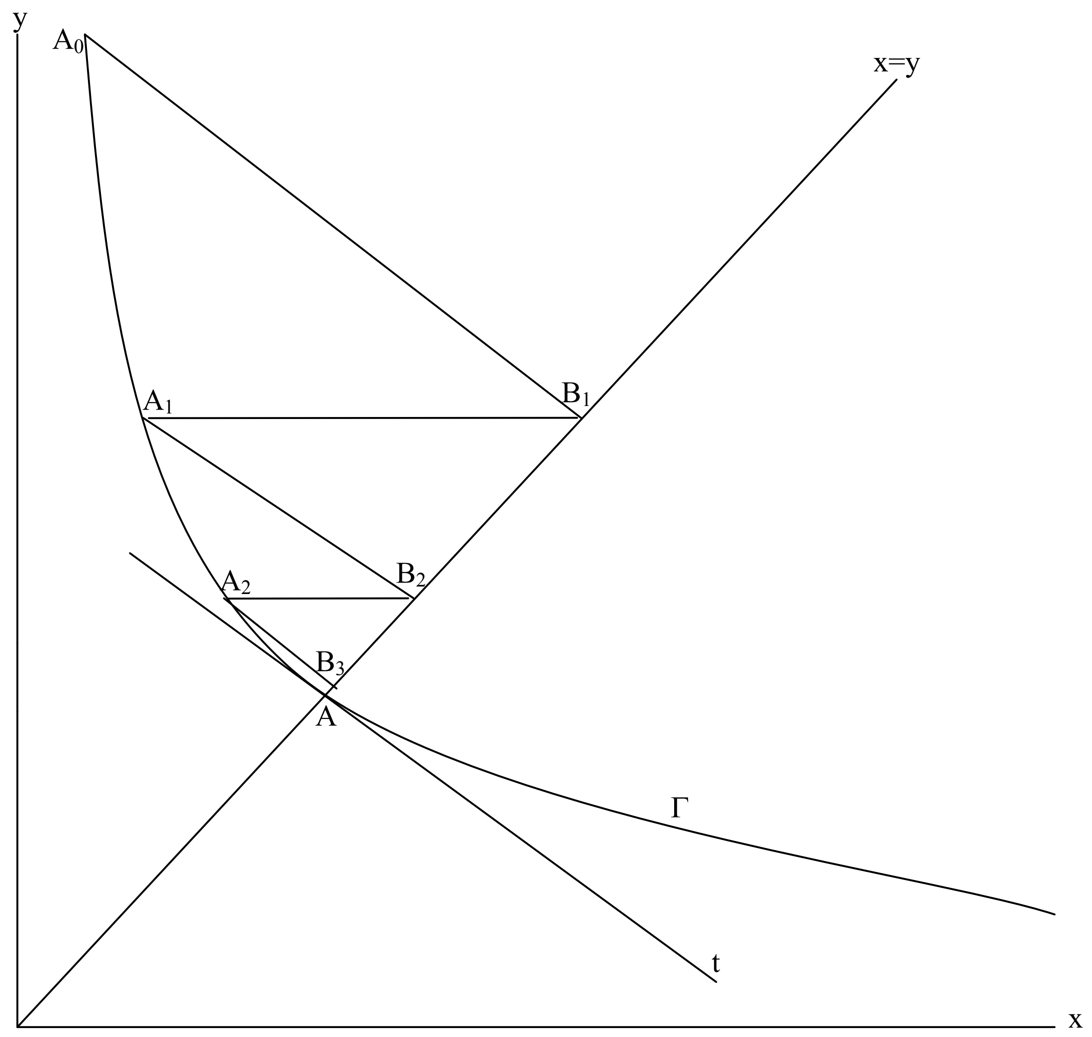


figura 1

În figura1 curba Γ are ecuaţia $x \cdot y^4 = x_0 \cdot y_0^4$ unde x_0 şi y_0 sunt coordonatele punctului A_0.Intersecţia curbei Γ cu dreapta de ecuaţie x=y este punctul A .Tangenta în A la Γ este dreapta notată cu t .De reţinut faptul că $0 < x_0 < y_0$.

Pornind de la A_0 se construieşte şirul de puncte A_1 ,A_2 ,A_3, …,A_n,…în felul următor :
-paralela prin A_i la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_{i+1}
-paralela prin B_{i+1}la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_{i+1}

Astfel fiind dat punctul A_0, paralela prin A_0 la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_1, iar paralela prin B_1la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_1 ;
paralela prin A_1 la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_2 iar paralela prin B_2 la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_2 ;şi aşa mai departe…

Intuitiv , deoarece dreptele A_iB_{i+1} sunt paralele cu tangenta t , şirul de puncte A_1 ,A_2 ,A_3, …,A_n,…este convergent la A.

Aceasta implică şi convergenţa pe coordonate.

Deoarece A aparţine dreptei de ecuaţie x=y avem că $A(\lambda,\lambda)$
Deoarece A aparţine curbei Γ rezultă $\lambda \cdot \lambda^4 = x_0 \cdot y_0^4$; alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu $0 < a < 1$, de unde rezultă că $\lambda = \sqrt[5]{a}$.

Deoarece $A_n(x_n, y_n)$este un şir de puncte convergent la $A(\lambda,\lambda)$ rezultă că şirurile x_n şi y_n sunt convergente la $\lambda = \sqrt[5]{a}$.

Cum calculăm termenii şirurilor x_n şi y_n ?
*Ecuaţia dreptei A_0B_1 :
-mai întâi calculăm panta tangentei t care este şi panta dreptei A_0B_1 :

$$\frac{d}{dx}(xy^4 - x_0y_0^4) = 0 \Leftrightarrow y^4 + 4xy^3\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4x} \Rightarrow \text{daca } y = x \text{ atunci } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$$

-ecuaţia dreptei A_0B_1 este $y = -\frac{1}{4}x + c \Leftrightarrow x + 4y = 4c$;
-deoarece A_0 aparţine dreptei A_0B_1 putem calcula constanta 4c cu formula $x_0 + 4y_0 = 4c$;

-în final ecuaţia dreptei A_0B_1 este $x + 4y = x_0 + 4y_0$
*Coordonatele lui B_1:
-deoarece $A_1$are coordonatele (x_1, y_1) şi $A_1B_1 \parallel$ ox rezultă că $B_1$are coordonatele $B_1(y_1, y_1)$.
-deoarece $B_1(y_1, y_1)$ aparţine dreptei A_0B_1 rezultă $y_1 + 4y_1 = x_0 + 4y_0$ adică $y_1 = \frac{x_0 + 4y_0}{5}$.
*Coordonatele lui A_1:
Avem $A_1(x_1, y_1)$ şi $y_1 = \frac{x_0 + 4y_0}{5}$. Deoarece $A_1(x_1, y_1) \in \Gamma$ rezultă $x_1 \cdot y_1^4 = x_0 \cdot y_0^4$;
de aici rezultă $x_1 = \frac{x_0y_0^4}{y_1^4} = \frac{625x_0y_0^4}{(x_0 + 4y_0)^4}$.

*Fiind dat $A_n(x_n, y_n)$ se pot calcula ca mai sus coordonatele lui $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ cu formulele $x_{n+1} = \dfrac{625x_n y_n^4}{(x_n + 4y_n)^4}$ şi $y_{n+1} = \dfrac{x_n + 4y_n}{5}$
(în locul lui A_0 punem punctul A_n şi în locul lui A_1 punem punctul A_{n+1}).

*Să ne amintim însă că $A_n(x_n, y_n) \to A(\lambda, \lambda)$
(unde $\lambda = \sqrt[5]{a}$ dacă alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ şi $0 < a < 1$).
De aceea toate aceste consideraţii intuitive ne conduc la formularea următoarei teoreme:

TEOREMĂ

Fie funcţiile $f(x;y) = \dfrac{625xy^4}{(x+4y)^4}$ şi $g(x;y) = \dfrac{x+4y}{5}$ definite pe domeniul $D = \{(x;y) | 0 < x \le y\}$ şi fie numerele $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu proprietatea $0 < a < 1$.
Atunci şirurile $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ sunt convergente la $\lambda = \sqrt[5]{a}$.

Demonstraţie :

Pentru a demonstra teorema avem nevoie de câteva rezultate preliminare :

Propoziţia 1. Dacă 0<x<y atunci $x < f(x;y) < g(x;y) < y$
Demonstraţie :
a)

$$x < y \Leftrightarrow x + 4y < 5y \Leftrightarrow (x+4y)^4 < 625y^4 \Leftrightarrow 1 < \frac{625y^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow x < \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow x < f(x;y)$$

b) $$x < y \Leftrightarrow x + 4y < 5y \Leftrightarrow \frac{x+4y}{5} < y \Leftrightarrow g(x;y) < y$$

c) $$f(x;y) < g(x;y) \Leftrightarrow \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} < \frac{x+4y}{5} \Leftrightarrow 5^5 xy^4 < (x+4y)^5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{xy^4} < \frac{x+4y}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{xyyyy} < \frac{x+y+y+y+y}{5}$$

Ultima inegalitate este adevărată pe baza inegalităţii dintre media aritmetică şi media geometrică a 5 numere.

Propoziţia 2. Dacă $x = f(x;y)$ sau daca $g(x;y) = y$ atunci x=y.
Demonstraţie :

a) $$x = f(x;y) \Leftrightarrow x = \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow (5y)^4 = (x+4y)^4 \Leftrightarrow 5y = x + 4y \Leftrightarrow y = x$$

b) $$g(x;y) = y \Leftrightarrow \frac{x+4y}{5} = y \Leftrightarrow x + 4y = 5y \Leftrightarrow x = y$$

Consecinţe :
a) Dacă în Propoziţia1. punem $x = x_n$ si $y = y_n$ obţinem
$x_n < f(x_n; y_n) < g(x_n; y_n) < y_n$ adică $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$;

În ultimele inegalităţi dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_2 < y_1 < y_0$

Ultimele inegalităţi ne arată că şirurile $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ sunt convergente deoarece sunt monotone şi mărginite;să notăm $\mu = \lim x_n$ şi $\eta = \lim y_n$

b) Dacă în $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ trecem la limită obţinem
$\mu = f(\mu; \eta)$ şi $g(\mu; \eta) = \eta$ (am folosit aici continuitatea funcţiilor f şi g)
Aplicând Propoziţia 2. rezultă că $\mu = \eta$ .Să notăm cu λ valoarea comună a celor două limite.
Mai avem de arătat că $\lambda = \sqrt[5]{a}$; atunci teorema va fi demonstrată complet.

Propoziţia 3. Fie funcţia $\Psi(x; y) = \sqrt[5]{xy^4}$ .Atunci:
a) $\Psi(x; y) = \Psi(f(x; y); g(x; y))$
b) $\Psi(x; x) = x$
Demonstraţie:

a) $\Psi(f(x; y); g(x; y)) = \sqrt[5]{f(x; y) \cdot (g(x; y))^4} = \sqrt[5]{\frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \cdot \left(\frac{x+4y}{5}\right)^4} = \sqrt[5]{xy^4} = \Psi(x; y)$

b) $\Psi(x; x) = \sqrt[5]{x \cdot x^4} = \sqrt[5]{x^5} = x$
Consecinţe:
$\Psi(x_n; y_n) = \Psi(f(x_n; y_n); g(x_n; y_n)) = \Psi(x_{n+1}; y_{n+1})$;
-Dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$\Psi(x_0; y_0) = \Psi(x_1; y_1) = \ldots = \Psi(x_n; y_n)$.
-Trecem la limită în ultimul şir de egalităţi şi ţinem seama de faptul că funcţia Ψ este continuă; obţinem că :
$\Psi(x_0; y_0) = \Psi(x_1; y_1) = \ldots = \lim \Psi(x_n; y_n) = \Psi(\lim x_n; \lim y_n) = \Psi(\lambda; \lambda) = \lambda$
adică $\lambda = \Psi(x_0; y_0)$
-Alegem $x_0 = a$, $y_0 = 1$ cu 0<a<1;obţinem:
$\lambda = \Psi(x_0; y_0) = \sqrt[5]{x_0 y_0^4} = \sqrt[5]{a \cdot 1^4} = \sqrt[5]{a}$
Cu aceasta **demonstraţia teoremei este încheiată**.

EXEMPLU : calculăm primele patru iteraţii pentru $\sqrt[5]{0,3}$:

$\begin{cases} x_1 = 0,548437888 \\ y_1 = 0,86 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 0,740951769 \\ y_2 = 0,797687577 \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = 0,78465521 \\ y_3 = 0,786340415 \end{cases}$, $\begin{cases} x_4 = 0,786001927 \\ y_4 = 0,786003374 \end{cases}$

-în calcule am pornit cu valorile $x_0 = 0,3$ şi $y_0 = 1$
-observăm că $\sqrt[5]{0,3} = 0,78600\ldots$ unde cu siguranţă primele 5 zecimale sunt exacte deoarece
$\sqrt[5]{0,3} - x_4 < y_4 - x_4 < 10^{-5}$

-în general putem evalua eroarea $\varepsilon = \sqrt[5]{a} - x_n < y_n - x_n$;deci odată cu evaluarea radicalului avem şi un control al erorii; despre eroarea ε putem afirma că este întotdeauna mai mică decât diferenţa $y_n - x_n$.

2. Calculul iterativ al lui $\sqrt[N]{a}$ când $0 < a < 1$

În cele ce urmează vom urmări în linii mari etapele parcurse în calculul lui $\sqrt[5]{a}$ pentru a da o metodă de calcul al lui $\sqrt[N]{a}$, N>1**.** Vom indica schimbările care apar în demonstraţii.

Consideraţii geometrice:

Ne vom raporta tot la figura 1., dar de data aceasta ecuaţia curbei Γ este $xy^{N-1} = x_0 y_0^{N-1}$.
Deoarece A aparţine dreptei de ecuaţie x=y avem că $A(\lambda,\lambda)$
Deoarece A aparţine curbei Γ rezultă $\lambda \cdot \lambda^{N-1} = x_0 \cdot y_0^{N-1}$; alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu $0 < a < 1$, de unde rezultă că $\lambda = \sqrt[N]{a}$.

Deoarece $A_n(x_n, y_n)$ este un şir de puncte convergent la $A(\lambda,\lambda)$ rezultă că şirurile x_n şi y_n sunt convergente la $\lambda = \sqrt[N]{a}$ .Construcţia punctelor $A_n(x_n, y_n)$ este asemănătoare cu cea din cazul calculului lui $\sqrt[5]{a}$.

*Ecuaţia dreptei A_0B_1 :
$x + (N-1)y = x_0 + (N-1)y_0$

*Coordonatele lui B_1:
-deoarece A_1 are coordonatele (x_1, y_1) şi $A_1B_1 \parallel$ ox rezultă că B_1 are coordonatele $B_1(y_1, y_1)$.
-deoarece $B_1(y_1, y_1)$ aparţine dreptei A_0B_1 rezultă $y_1 + (N-1)y_1 = x_0 + (N-1)y_0$ adică
$y_1 = \dfrac{x_0 + (N-1)y_0}{N}$.
*Coordonatele lui A_1:
-deoarece $A_1(x_1, y_1) \in \Gamma$ rezultă

$$x_1 = \frac{N^{N-1} x_0 y_0^{N-1}}{(x_0 + (N-1)y_0)^{N-1}} \text{ şi } y_1 = \frac{x_0 + (N-1)y_0}{N} \qquad (*)$$

Ultimele două formule indică prima iteraţie în calculul valorilor celor două şiruri.

Înlocuind indicele “0”cu “n” şi indicele “1” cu “n+1”în formulele (*) obţinem formulele de recurenţă necesare calculului şirurilor x_n şi y_n.

Consideraţiile geometrice de mai sus conduc la formularea următoarei teoreme:

TEOREMĂ

Fie funcţiile $f(x;y)=\dfrac{N^{N-1}xy^{N-1}}{(x+(N-1)y)^{N-1}}$ şi $g(x;y)=\dfrac{x+(N-1)y}{N}$ definite pe domeniul $D=\{(x;y)|0<x\le y\}$ şi fie numerele $x_0=a$ şi $y_0=1$ cu proprietatea $0<a<1$.

Atunci şirurile $x_{n+1}=f(x_n;y_n)$ şi $y_{n+1}=g(x_n;y_n)$ sunt convergente la $\lambda=\sqrt[N]{a}$.

Demonstraţie :

Pentru a face demonstraţia avem nevoie de următoarele Propoziţii despre f şi g din teoremă :

Propoziţia 1. Dacă 0<x<y atunci $x<f(x;y)<g(x;y)<y$

Propoziţia 2. Dacă $x=f(x;y)$ sau daca $g(x;y)=y$ atunci x=y.

Propoziţia 3. Fie funcţia $\Psi(x;y)=\sqrt[N]{xy^{N-1}}$ .Atunci:

a) $\Psi(x;y)=\Psi(f(x;y);g(x;y))$

b) $\Psi(x;x)=x$

Demonstraţiile propoziţiilor urmează întru-totul cele din cazul N=5 ;de aceea le omitem.

*Consecinţa Propoziţiei 1:

Dacă în Propoziţia1. punem $x=x_n$ si $y=y_n$ obţinem

$x_n<f(x_n;y_n)<g(x_n;y_n)<y_n$ adică $x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n$;

În ultimele inegalităţi dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :

$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots<y_n<\ldots<y_2<y_1<y_0$

Ultimele inegalităţi ne arată că şirurile $x_{n+1}=f(x_n;y_n)$ şi $y_{n+1}=g(x_n;y_n)$ sunt convergente deoarece sunt monotone şi mărginite;să notăm $\mu=\lim x_n$ şi $\eta=\lim y_n$

*Consecinţa Propoziţiei 2:

Dacă în $x_{n+1}=f(x_n;y_n)$ şi $y_{n+1}=g(x_n;y_n)$ trecem la limită obţinem

$\mu=f(\mu;\eta)$ şi $g(\mu;\eta)=\eta$ (am folosit aici continuitatea funcţiilor f şi g)

Aplicând Propoziţia 2. rezultă că $\mu=\eta$ .Să notăm cu λ valoarea comună a celor două limite.

*Consecinţa Propoziţiei 3:

$\Psi(x_n;y_n)=\Psi(f(x_n;y_n);g(x_n;y_n))=\Psi(x_{n+1};y_{n+1})$;

-Dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :

$\Psi(x_0;y_0)=\Psi(x_1;y_1)=\ldots=\Psi(x_n;y_n)$.

-Trecem la limită în ultimul şir de egalităţi şi ţinem seama de faptul că funcţia Ψ este continuă; obţinem :

$\Psi(x_0;y_0)=\Psi(x_1;y_1)=\ldots=\lim\Psi(x_n;y_n)=\Psi(\lim x_n;\lim y_n)=\Psi(\lambda;\lambda)=\lambda$

adică $\lambda=\Psi(x_0;y_0)$

-Alegem $x_0=a$, $y_0=1$ cu 0<a<1;obţinem:

$\lambda=\Psi(x_0;y_0)=\sqrt[N]{x_0y_0^{N-1}}=\sqrt[N]{a\cdot 1^{N-1}}=\sqrt[N]{a}$

Cu aceasta **demonstraţia teoremei este încheiată**.

Observaţii:

1.Dacă N=2 calculăm cu formulele $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ şi $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ şi obţinem $\sqrt{a}$; evident că pornim calculele cu $x_0 = a < 1 = y_0$.

2.Cum calculăm $\sqrt[N]{a}$ dacă a>1 ? Avem $0 < \frac{1}{a} < 1$;calculăm mai întâi $\nu = \sqrt[N]{\frac{1}{a}}$;atunci $\sqrt[N]{a} = \frac{1}{\nu}$

Bibliografie:

Privelişti matematice-Isaac J. Schoenberg
Editura Tehnică 1989

prof Velcsov Gheorghe-grad didactic DEF- Grup Scolar Traian Grozavescu NADRAG

APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (5)**

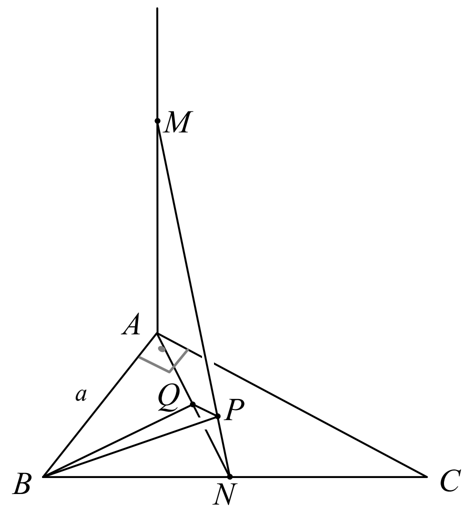
Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

Aplicaţie nr.1

Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$ şi $AB = a$.

Pe planul triumghiului, în punctual A, se duce perpendiculara d pe care se ia un punct mobil M. Fie $N \in [BC]$ astfel încât $[BN] \equiv [NC]$, $Q \in [AN]$ astfel încât $[AQ] \equiv [QN]$, şi $P \in MN$ astfel încât $BP \perp MN$.

Să se studieze variaţia volumului tetraedrului BNPQ



SOLUŢIE: Observăm mai întâi că volumul tetraedrului $BNPQ$ este mărime variabilă în raport cu poziţia punctului M pe dreapta d. Mărimea variabilă ce caracterizează poziţia punctului M este desigur lungimea AM pe care o vom nota cu x. Obţinem în felul acesta de calcul a volumului $BNPQ$ în rapor cu lungimea constantă a şi lungimea variabilă x. Se demonstrează uşor că $NP \perp (BPQ)$ astfe că volumul se poate calcula astfel: $V_{BNPQ} = \dfrac{A_{BPQ} \cdot PN}{3} = \dfrac{a^4\sqrt{3} \cdot x}{48(x^2 + a^2)}$ ceea ce conduce la construcţia funcţiei

$f : [0,+\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{a^4\sqrt{3} \cdot x}{48(x^2 + a^2)}$; pentru facilitarea expunerii prezentăm în cele ce urmează studiul funcţiei pentru cazul particular $a = 6$. Avem aşadar funcţia:

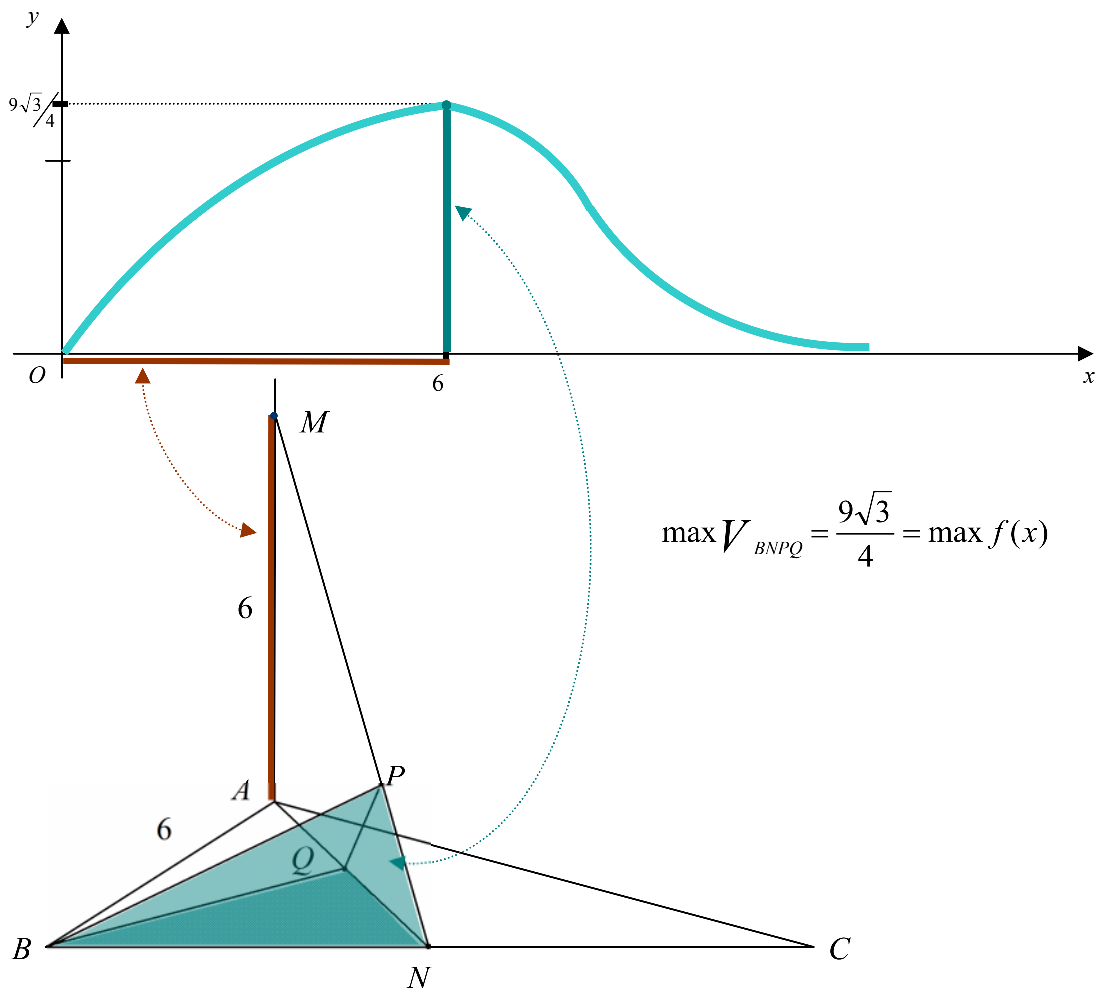
$$f : [0,+\infty) \to R, \quad f(x) = \frac{27\sqrt{3} \cdot x}{x^2 + 36}$$

Preliminarii pentru trasarea graficului:

$f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este asimptota orizontală; apoi derivata funcţiei este dată de $f'(x)=27\sqrt{3}\cdot\dfrac{-x^2+36}{(x^2+36)^2}$ iar $f'(x)=0$ are soluţia $x_\circ=6 \Rightarrow f(6)=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Tabloul de variaţie şi graficul funcţiei sunt prezentate mai jos ilustrându-se conexiunile corespunzătoare:

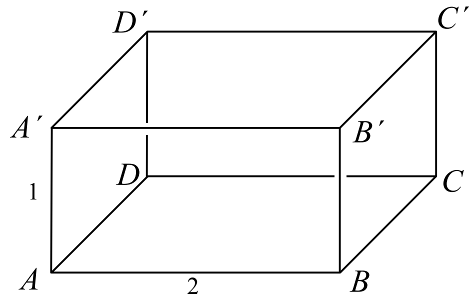
x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + + + + + + + + + +$	0	$- - - - - - - - - - - - - -$	
$f(x)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$9\sqrt{3}/4$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	0



$$\max V_{BNPQ}=\frac{9\sqrt{3}}{4}=\max f(x)$$

Aplicaţie nr.2

Se dă prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2$ şi $AA' = 1$. Să se determine piramida patrulateră regulată de volum minim în care se poate înscrie prisma.



SOLUŢIE: Fie $MEFGH$ o piramidă patrulateră regulată în care se înscrie prisma ; fie şi $O = AC \cap DB$ şi $O' = A'C' \cap D'B'$ iar M este un punct variabil pe semidreapta OO'.

Notăm $x = O'M$ şi $u = CG$.

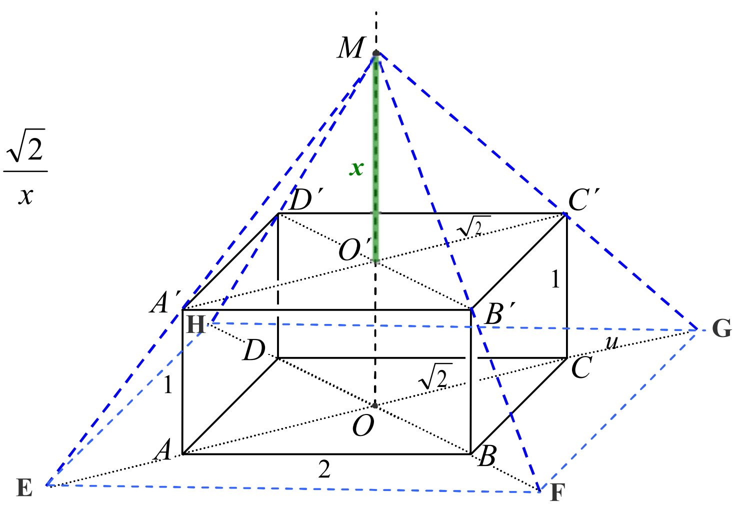
Din $\Delta C'CG \sim \Delta MO'C' \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow OG = \sqrt{2} + u = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{x}$

Aria bazei piramidei este aria pătratului $EFGH$ respectiv

$$A_{EFGH} = \frac{EG \cdot HF}{2} = \frac{EG^2}{2}$$

$$= 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 ; \; OM = 1 + x$$



şi astfel volumul piramidei este dat de

$$V_{MEFGH} = \frac{A_{EFGH} \cdot OM}{3} = \frac{4\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot (1 + x)}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

Construim funcţia $f:(0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{(x+1)^3}{x^2}$

Studiem în continuare variaţia acestei funcţii : $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=+\infty \Rightarrow$ funcţia are asimptota verticală axa Oy ;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală; studiind existenţa asimptotei oblice, obţinem asimptota oblică dată de ecuaţia $y=\frac{4}{3}x+4$.

Derivata funcţiei este

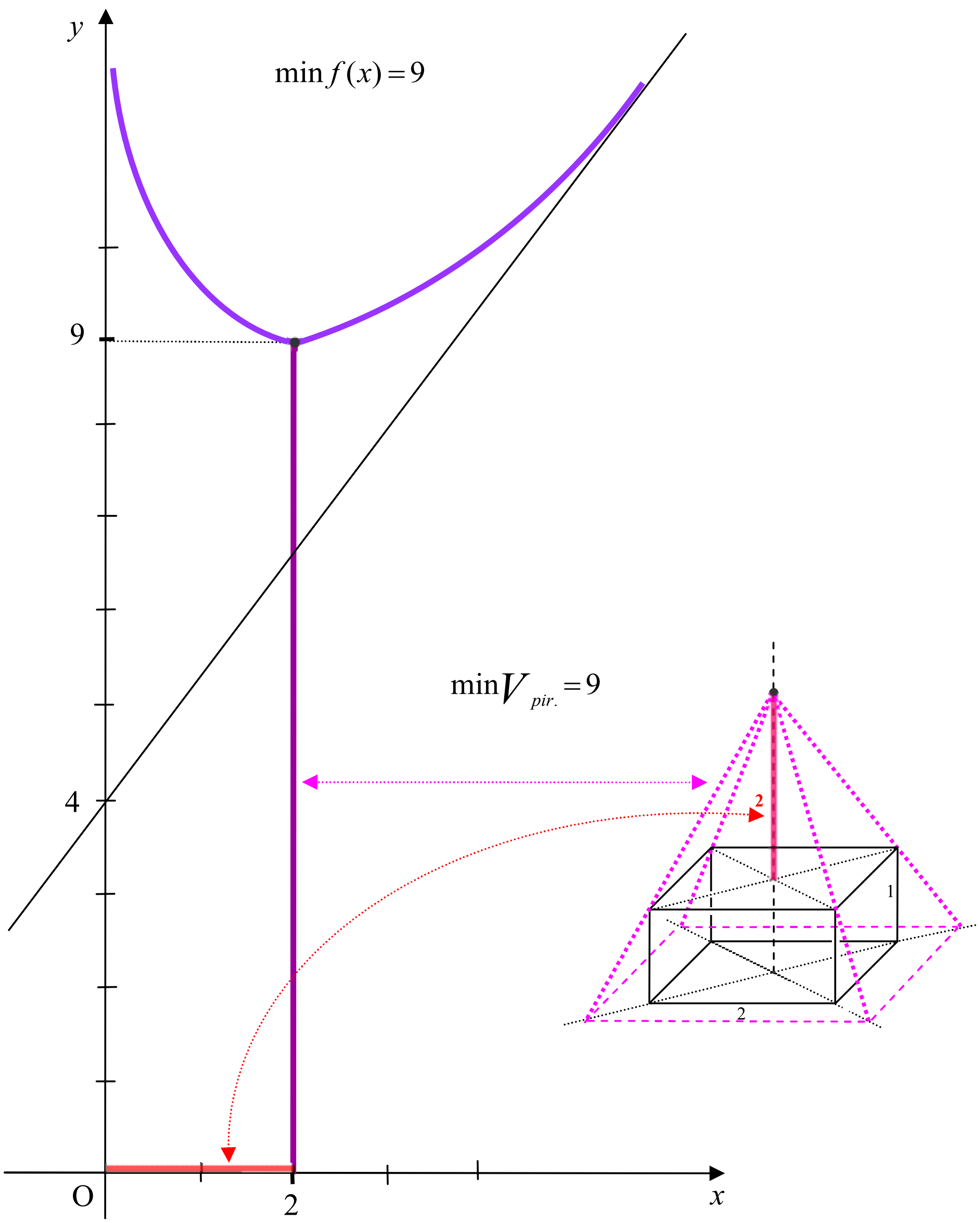
$f'(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x(x+1)^2(x-2)}{x^4}$ iar ecuaţia $f'(x)=0$ conduce la soluţia $x_0=2$.

Valoarea funcţiei în 2 este $f(2)=9$

Tabloul de variaţie

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		− − − − − − − − − −	0	+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$	$+\infty$	↘↘↘↘↘↘↘↘	9	↗↗↗↗↗↗↗↗	$+\infty$

Se prezintă în continuare graficul funcţiei indicându-se conexiunile aferente.


y
$\min f(x) = 9$
9
4
O
2
x
$\min V_{pir.} = 9$
2
1
2