Revista Electronică MateInfo.ro

IUNIE 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre (dobre.andrei@yahoo.com)
E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

www.mateinfo.ro are peste 7000 de vizitatori unici pe zi (lunile mai-iunie 2012)

1. Abordarea unei inegalităţi apărute în Sclipirea Minţii nr. IX

TITU ZVONARU, Comăneşti şi NECULAI STANCIU, Buzău

În articolul de faţă ne propunem să prezentăm modul de abordare şi câteva rafinări ale unei inegalităţi apărute în **Sclipirea Minţii nr. IX -2012**:

’’**L210.** *Să se arate că:*

$$\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}+\frac{(yz)^2}{x^2(y+z)}+\frac{(zx)^2}{y^2(z+x)}\geq\frac{x+y+z}{2},\forall x,y,z\in R_+\text{’’.}$$

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmboviţa

Enunţul ne sugerează folosirea inegalităţii lui *Bergström*.

Obţinem:

$$\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}+\frac{(yz)^2}{x^2(y+z)}+\frac{(zx)^2}{y^2(z+x)}\geq\frac{(xy+yz+zx)^2}{z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)},$$

şi ar trebui să demonstrăm că:

$$\frac{(xy+yz+zx)^2}{z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)}\geq\frac{x+y+z}{2},$$

adică, după efectuarea calculelor:

$$2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2\geq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y).$$

Din păcate, ultima inegalitate nu este adevărată; de fapt avem:

$$2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2\leq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y).$$

Într-adevăr, folosind inegalitatea mediilor, rezultă:

$$3x^3(y+z)+3y^3(z+x)+3z^3(x+y)=2x^3(y+z)+2y^3(z+x)+2z^3(x+y)+$$
$$+x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+x^3z+xz^3\geq 2x^3y+2x^3z+2y^2z^2+2y^3z+2xy^3+2x^2z^2+$$
$$+2xz^3+2yz^3+2x^2y^2\geq 6x^2yz+6xy^2z+6xyz^2,$$

iar prin împărţire cu 3 obţinem afirmaţia făcută.

Prima încercare de a folosi inegalitatea lui *Bergström* nu a dus la rezultatul dorit, ceea ce nu înseamnă că trebuie să abandonăm ideea. Astfel avem:

$$\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}+\frac{(yz)^2}{x^2(y+z)}+\frac{(zx)^2}{y^2(z+x)}=\frac{\left(\frac{xy}{z}\right)^2}{x+y}+\frac{\left(\frac{yz}{x}\right)^2}{y+z}+\frac{\left(\frac{zx}{y}\right)^2}{z+x}\geq$$

$$\geq \frac{\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2}{2(x+y+z)},$$

şi ar trebui să demonstrăm că:

$$\frac{\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2}{2(x+y+z)} \geq \frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2+(yz)^2+(zx)^2 \geq xyz(x+y+z),$$

inegalitate care este binecunoscuta $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$,
aplicată numerelor xy, yz, zx.
Deci, am obţinut o soluţie pentru problema **L210.**

Orice rezolvitor interesat de domeniul inegalităţilor ar trebui să-şi pună întrebarea: mai există alte soluţii?

Să încercăm altă abordare:

$$\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{x+y}{4}=\frac{4x^2y^2-z^2(x+y)^2}{4z^2(x+y)}=\frac{[2xy+z(x+y)][2xy-z(x+y)]}{4z^2(x+y)}=$$

$$=\frac{[2xy+z(x+y)]y(x-z)+[2xy+z(x+y)]x(y-z)}{4z^2(x+y)}.$$

Deoarece,

$$\frac{2xy+z(x+y)}{4z^2(x+y)}=\frac{xy}{2z^2(x+y)}+\frac{1}{4z},$$

rezultă:

$$\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{x+y}{4}=\frac{xy^2(x-z)}{2z^2(x+y)}+\frac{y(x-z)}{4z}+\frac{x^2y(y-z)}{2z^2(x+y)}+\frac{x(y-z)}{4z} \quad (1)$$

şi analog:

$$\frac{(yz)^2}{x^2(y+z)}-\frac{y+z}{4}=\frac{yz^2(y-x)}{2x^2(y+z)}+\frac{z(y-x)}{4x}+\frac{y^2z(z-x)}{2x^2(y+z)}+\frac{y(z-x)}{4x} \quad (2)$$

$$\frac{(zx)^2}{y^2(z+x)}-\frac{z+x}{4}=\frac{zx^2(z-y)}{2y^2(z+x)}+\frac{x(z-y)}{4y}+\frac{z^2x(x-y)}{2y^2(z+x)}+\frac{z(x-y)}{4y} \quad (3)$$

Grupând convenabil termenii din partea dreaptă a relaţiilor (1), (2), (3) (ţinând cont de numărătorii fracţiilor), obţinem:

$$\frac{xy^2(x-z)}{2z^2(x+y)}+\frac{y^2z(z-x)}{2x^2(y+z)}+\frac{y(x-z)}{4z}+\frac{y(z-x)}{4x}=$$

$$=\frac{y^2(x-z)}{2}\left(\frac{x}{z^2(x+y)}-\frac{z}{x^2(y+z)}\right)+\frac{y(x-z)}{4}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\frac{y^2(x-z)}{2}\cdot\frac{y(x^3-z^3)+xz(x^2-z^2)}{x^2z^2(x+y)(y+z)}+\frac{y(x-z)^2}{4xz}=$$
$$=\frac{y^2(x-z)^2[y(x^2+xz+z^2)+xz(x+z)]}{2x^2z^2(x+y)(y+z)}+\frac{y(x-z)^2}{4xz}.$$

Scriind încă două relaţii similare, după adunare obţinem identitatea:

$$\sum\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{1}{2}\sum x=\sum\frac{z^2(x-y)^2[z(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)]}{2x^2y^2(y+z)(z+x)}+\sum\frac{z(x-y)^2}{4xy} \qquad (4)$$

care furnizează o altă demonstraţie pentru inegalitatea în discuţie.

Chiar dacă a necesitat ceva calcule (uşor de condus totuşi către forma dorită), a doua abordare ne permite obţinerea unor rafinări ale inegalităţii date. Astfel deducem următoarele inegalităţi:

$$\sum\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{1}{2}\sum x\geq\sum\frac{z(x-y)^2}{4xy};$$
$$\sum\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{1}{2}\sum x\geq\frac{1}{2}\left(\sum x\right)\sum\frac{z^2(x-y)^2}{xy(y+z)(z+x)};$$
$$\sum\frac{(xy)^2}{z^2(x+y)}-\frac{1}{2}\sum x\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{8(x+y)(y+z)(z+x)}\sum\frac{z^2(x^2-y^2)^2}{x^2y^2};$$

(pentru ultima inegalitate am folosit faptul că: $x^2+y^2+xy\geq\frac{3}{4}(x+y)^2$).

2. Matematica Evului Mediu

Prof. Dascălu Daniela
Şcoala cu cls I-VIII Mircea Vodă
Structura Şcolară Deduleşti
Jud. Brăila

Până în sec XIII, diferitele ramuri ale matematicii au cunoscut în Europa numai contribuţiile autorilor arabi, (şi prin intermediul traducerilor arabe- ale matematicienilor greci, indieni şi persani).

În sec IX, savanţii arabi au adoptat sistemul de numeraţie zecimală, preluându-l de la indieni (la fel ca şi regula de trei). Primul manual de aritmetică bazat pe principiul valorii de poziţie a simbolurilor a fost întocmit în jurul anului 830 de al-Khwariymi; opera algebrică a acestuia va fi completată, spre sfârşitul secolului al XI-lea, de strălucitul matematician Omar Khayyam, care în Algebra sa găseşte soluţii foarte ingenioase. Matematicienii arabi au introdus fracţiile zecimale şi au reuşit să extragă rădăcinile pătrate şi cubice. Foarte curând, ei vor opera frecvent şi cu iraţionalele algebrice, sub formele lor aritmetice. Teoria proporţiilor, teoria numerelor, ecuaţiile cubice, calculele geometrice, îşi datorează progresele, într-o măsură notabilă, acestor savanţi. Iar în tabelel trigonometrice ale lui Al-Khwariymi apare pentru prima dată noţiunea de sinus, în timp ce noţiunea de tangentă se întâlneşte mai întâi la al-Farghani (sec X). În acelaşi secol al X-lea, matematicienii arabi introduc şi noţiunile de cosinus şi cotangentă.
Marele astronom al-Battani, elaborându-şi celebra lucrare de astronomie (tradusă în latină cu titlul *De scientia stellarum*) se ocupă mult- mai ales în pregătirea tabelelor- de trigonometria sferică stabilind noi teoreme,- dintre care cea mai importantă este teoria cosinusului pentru triunghiurile sferice. Tot atunci, alţi cercetători arabi discută şi rezolvă geometric trisecţiunii unghiului, folosind un procedeu nou, introduc secanta şi cosecanta în trigonometria sferică, etc.

În sec. XI, Ibn al Haytham, Ibn Sina şi al-Biruni aduc şi ei contribuţii importante pentru dezvoltarea matematicii. Primul, pune şi rezolvă în Optica sa probleme de geometrie; al doilea, celebru ca filozof şi medic; este şi autor al unor scrieri de aritmetică şi geometrie; iar al-Biruni scrie o lucrare despre calculul arcului arcurilor unui cerc, cu bogate referinşe la rezultate ale matematicii greceşti care între timp se pierduseră, cu bogate referinţe la rezultatele matematicii greceşti care între timp se pierduseră; ajungând la soluţionarea unei ecuaţii de gradul al treilea, face cercetări interesante de trigonometrie calculând o valoare a lui π cu o remarcabilă aproximaţie şi stabilind diverse proprietăţi ale triunghiurile sferice.

În Occident, aceste intense preocupări şi aceste rezultate ale matematicienilor arabi au trezit un viu interes chiar din sec. X, - când Gerbert d'Aurillac, care venise în contact îndelungat cu lumea arabă, scrie tratatul său despre abac. Dar despre o renaştere a matematicii europene se poate vorbi doar începând din sec. XIII, când se vor înregistra progrese remarcabile în aritmetică, algebră şi trigonometrie.

Cel care inaugurează aceată mişcare este Leonardo Fibonacci da Pisa. În opera sa fundamentală Liber abaci- în care termenul „abac” este luat într-un sens atât de de larg încât ajunge să-l înlocuiască pe cel de algoritm- intenţia lui este să propage şi să familiarizeze lumea occidentală cu principiile de calcul ale arabilor, introducând folosirea curentă a cifrelor zise “arabe” atât în lucrările ştiinţifice cât şi în cele ţinând de practica comercială. Explicând valoare cifrelor arabe Fibonacci clarifică valoarea de poziţie a notaţiei, care face ca numerele compuse din trei cifre (213, 123, 132, 321, 321 şi 312) să aibă valori diferite. (Despre acestea vorbise, cu un secol înainte, şi Adele din Bath; dar numai după apariţia cărţii lui Fibonacci vechiul sistem de notaţie cu litere – I, V, X, L, M, C, D,- folosit de greci şi de romani, a fost abandonat).

Lucrarea lui Fibonacci conţine şi un studiu amplu de fracţii, despre radicali, despre ecuaţii, o serie amplă de aplicaţii practice ale aritmeticii, etc. În soluţiile algebrice care le conţine, deşi inspirate de multe ori din Algebra lui Al-Khwarizmi, nu lipseşte nu lipseşte totuşi nota de clară originalitate. Dar lucrările în care Fibonacci este mai personal, dovedind aptitudini cu totul remarcabile în calculele cele mai dificile, sunt *Los Leonardi* şi *Liber quadratorum*. În demonstraşiile sale, pentru a le da un caracter general el a înlocuit numerele cu litere; a dezvoltat analiza nedeterminată şi succesiunea de numere în care fiecare reprezintp suma celorlalte două anterioare; a soluţionat probleme care implicau ecuaţii de gradul IV; şi – fapt de-a dreptul senzaţional pentru acele timpuri – a recurs la ajutorul algebrei pentru a rezolva probleme de geometrie.

Trecerea spre algebra simbolică sau sincopată (în care termenii tehnici sunt înlocuiţi cu abrevieri) este realizată de germanul Jordanus Nemorarius, m. 1237 – general al Ordinului dominican, - care s-a ocupat, cum am văzut, de mecanică şi aritmetică, algebră şi geometrie. În lucrările sale cele mai originale – *Algoritmus demonstratus, De triangulis, De numeris datis, De isoperimetris,* - el foloseşte în problemele de aritmetică litere alfabetice ca simboluri algebrice pentru a indica mărimi nedeterminate; rezolvă probleme de algebră care duceau şi trisecţia triunghiului; discută despre unghiul de contingenţă format de o curbă cu tangenta sa.

Celălalt matematician reprezentativ al sec XIII, Campanus de Novara (m. 1296) îşi însoţeşte traducerea latină – din arabă – a Elementelor lui Euclid de un important comentar, conţinând consideraţii (care, în secolele următoare, vor forma obiectul unor frecvente discuţii) asupra pentagonului stelat şi a unghiului de contingenţă. Încât, versiunea acesata a *Elementelor* va fi cea mai apreciată, până târziu, în epoca Renaşterii.

În sec XIV., în Anglia studiile matematice vor fi ilustrate de cercetările lui Thomas Bradwardine (cca 1290 – 1349) asupra isoperimetrelor, poligoanelor stelate. De asemenea, de cele din domeniul trigonometriei – primele din Occident – ale lui Richard din Wallingford (1291 – 1336).

În Franţa, astronomul şi matematicianul Levi ben Gerson scrie lucrări de geometrie, aritmetică şi rigoarea ştiinţifică a gândirii (îndeosebi în criticapostulatelor euclidiene).

Dar cel mai original matematician al secolului este Nicolas Oresme (cc 1323 – 1382). Teoria proporţiilor formulată de el, bazată pe folosirea exponenţilor fracţionari, este de fapt o teorie a iraţionalelor. Cele mai mari merite ale lui Oresme constau în interpretarea matematică, în “matematizarea” fizicii – prin reprezentarea „cantităţii unei calităţi”, servindu-se de mijlocul unei figuri geometrice, prin reducerea intensităţii calităţii la o scară de mărimi măsurabile. (G. Beaujouan) – în lucrările *De configuratione calitatum, De configurationibus intensionum*, etc "Opera sa reprezintă un pas important către inventarea geometriei analitice şi introducerea în geometrie a ideii de mişcare, idée care lipsea în geometria greacă" – observă A.C. Crombie. Iar P. Brunet, referindu-se la ideile expuse în *Taite des latitudes des formes*, subliniază o descoperire a lui Oresme susceptibilă şi în domeniul matematicilor pure de repercursiuni importante: " Este cea care, reluată mai târziu de Descartes cu o nouă amploare, va permite reprezentarea grafică, printr-o curbă, a variaţiilor funcţionale, adică introducerea coordonatelor rectangulare ".- Ceea ce a făcut (afirmă şi P. Duhem) ca Oresme să poată fi considerat "precursorul lui Descartes în geometria analitică şi a lui Galilei în cinematică".

Matematicieni ai Evului Mediu

Numeraţie şi operaţii

În cartea lui **Brahmagupta** (sec 7) întâlnim calcule cu numărul zero şi unele pătrate magice simple. Un pătrat magic simplu este dat de tabelul

4	9	2
3	5	7
8	1	6

în care suma elementelo pe linii, coloane şi pe diagonale este aceeaşi, iar numerele sunt toate diferite, consecutive.

Al Horezmi (sec 9) dă prima expunere a numeraţiei poziţionale şi a operaţiilor corespunzătoare, care au o orogine individuală. În numeraţia poziţională, o cifră, de exmplu 2 poate să însemne şi 2 unităţi şi 20, 200, etc., după locul pe care îl ocupă în scriere. În modul acesta se simplifică foarte mult scrierea şi mai ales operaţiile de înmulţire şi de împărţire.

În Occidentul Europei, numeraţia poziţională a fost introdusă din sec al II-lea, datorită răspândirii cărţii lui Horezmi; pînă atunci era folosită scrierea cu cifre romane, în care pentru 2, 20, 200, 2000, etc. erau întrebuinţate literele II, XX, CC, MM, ... deci principiul juxtapunerii. Cifrele, deşi erau numite arabe, erau reprezentate prin diferite simboluri în cursul timpului, iar forma lor actuală a fost fixată în Europa, cu ocazia inventării tiparului.

Teoria numerelor naturale

Aribhata (sec 6) a dat formulele pentru suma pătratelor şi a cuburilor numerelor naturale.

Naraiana (sec 14) a calculat sume de termeni care generalizează numere triunghiulare, piramidale, etc., anume

$$S_n^1 = 1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n \ (n+1)}{2}$$

$S_n^2 = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n\ \ (n+1)}{2} = \frac{n\ \ (n+1)(n+2)}{6}$,*etc* extinse la S_n^n care în fond revine la sume de combinări.
$C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.
De altfel în India erau cunoscute şi identităţi numerice echivalente în transcrierea modernă cu
$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
Baskara (sec 12) rezolvă în mulţimea numerelor întregi, ecuaţiile liniare ax+b=cy, printr-un procedeu care în fond este acelaşi cu descompunerea în fracţii continue.
Leonardo da Pisa (Fibonacci) (sec 13) a introdus şirul numerelor, care poată numele de şirul lui Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,11,...
Prin relaţia de recurenţa $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, rezultă
$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^n + \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^n\right]$.
Acest şir reprezintă legea creşterii organice, adică legea creşterii unui organism care rămâne neutru asemenea cu el însuşi.

Calcul algebric
Contribuţia esenţială adusă de arabi progresului ştiinţeieste crearea algebrei şi a trigonometriei, pe baza geometriei greceşti. Numerele negative, care marchează diferenţa hotărâtoare dintre aritmetică şi algebră sunt introduse de indieni.
Brahmagupta (sec 7) a considerat prima oară numerele negative şi a dat regulile de adunare şi scădere cu numerele pozitive şi negative. El folosea simboluri pentru necunoscute şi operaţii. A dat formula unei identităţi algebrice. Ştia să raţionalizeze numitorii unei expresii destul de complicate cu radicali.
Baskara (sec 12) a dezvoltat notaţia simbolică. A dat reguli de înmulţire şi împărţire cu numere algebrice (pozitive şi negative) cu numere iraţionale. El ştia să descompună radicali suprapuşi, de exemplu $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi să raţionalizeze numitorul expresiei

$$\frac{3+\sqrt{54}+\sqrt{150}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Arabii au dezvoltat considerabil algebra, în conţinut şi în formă.

Al Horezi (sec 9) a dat reguli de trecere a termenilor dintr-o parte în alta, procedeu numit *al jabr*, de unde a venit şi numele disciplinei şi de reducerea termenilor asemenea ca şi simplificarea întregii ecuaţii cu un număr, ca să aducă ecuaţiile de gradul al doilea la forme canonice, cu coeficienţi pozitivi şi cel puţin o rădăcină pozitivă, după aceea aplica regula de rezolvare a cazului respectiv.
Al Horezi aducea toate ecuţiile la gradul al doilea la una din formele
$ax^2 = b$, bx=c, ax^2=bx, ax^2+bx=c, ax^2+c=bx, ax^2=bx+c,
Cu a, b, c poyitive şi aplică regula de rezolvare, în fiecare caz alta. Reducerea ecuaţiei la aceste tipuri este partea originală semnificativă, a operei lui Horezmi.

Bibliografie
3. N. Mihăileanu, *Istoria Matematicii, vol. I,* ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.
4. Ovidiu Drimba, *Istoria culturii şi civilizaţiei, vol. VI,* ed. Saeculum, Bucureşti, 2002.

7. Inegalitatea Gerretsen. Aplicații.

Prof. Codreanu Ioan Viorel
Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Scopul acestui articol este de a prezenta **Inegalitatea Gerretsen**, o inegalitatea geometrică între laturile unui triunghi și razele cercului circumscris, respectiv înscris al triunghiului. Prezentăm demonstrația algebrică a inegalității Gerretsen (din [2]), și apoi, ca aplicații, vor fi rezolvate unele inegalități geometrice.

Teoremă (Inegalitatea Gerretsen). Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi oarecare ABC, iar r,R sunt razele cercului înscris respectiv circumscris al triunghiului, atunci

$$a^2+b^2+c^2\le 8R^2+4r^2$$

Demonstrație. Înlocuind $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C, r=4R\prod\sin\frac{A}{2}$ și

$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$ și analoagele se obține după împărțirea cu $4R^2$ inegalitatea

$$\sum\sin^2 A\le 2+16\cdot\frac{\prod(1-\cos A)}{8}=2\left(1+\prod(1-\cos A)\right),$$

iar apoi $\sum\sin^2 A=\sum\left(1-\cos^2 A\right)$ și $1-\sum\cos^2 A=2\prod\cos A$ deci în final rămâne să demonstrăm inegalitatea

$$\prod\cos A\le\prod(1-\cos A).$$

După înlocuirea $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ și analoagele, aceasta se transformă în

$$\prod\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq\prod(a+b-c)^2$$

inegalitate pe care o demonstrăm în situația când numerele $a^2+b^2-c^2, a^2+c^2-b^2$, $b^2+c^2-a^2$ sunt pozitive, deci când triunghiul este ascuțitunghic. În situația când este dreptunghic sau obtuzunghic, inegalitatea este evidentă (expresia din stânga fiind zero sau negativă, iar cea din dreapta pozitivă). Considerăm $a\leq b\leq c$, fără a restrânge generalitatea. Demonstrăm mai întâi că

$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq(c+a-b)^2(a+b-c)^2 \Leftrightarrow$

$0\leq(b-c)^2\left(b^2+c^2-a^2\right)$, care este adevărată. Din inegalitățile

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq(c+a-b)^2(a+b-c)^2$$

$$\left(b^2+a^2-c^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)\leq(b+a-c)^2(c+b-a)^2$$

$$\left(c^2+b^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\leq(c+b-a)^2(a+c-b)^2$$

obținem inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$.

Comentariu. O altă formă posibilă pentru **Inegalitatea Gerretsen** este

$$p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Această formă a inegalității Gerretsen împreună cu o serie de identități geometrice din excelenta lucrare [1] vor fi folosite pentru a demonstra unele inegalități geometrice.

Să arătăm că are loc echivalența

$$\sum a^2\leq 8R^2+4r^2 \Leftrightarrow p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$$

Folosind relația

$$\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$$

avem

$$\sum a^2\leq 8R^2+4r^2 \Leftrightarrow 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\leq 8R^2+4r^2 \Leftrightarrow p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Aplicații.

O primă aplicație este demonstrarea inegalității **Finsler-Hadwiger**.

1. Cu notațiile obișnuite, în orice triunghi avem

$$\sum a^2\geq 4S\sqrt{3}+\sum(a-b)^2$$

Demonstrație. Folosind egalitățile

$$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$$
$$\sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr$$

avem

$$\sum a^2 \geq 4S\sqrt{3} + \sum (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum a^2 + 4S\sqrt{3} \leq 2\sum ab \Leftrightarrow$$
$$2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) + 4S\sqrt{3} \leq 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \Leftrightarrow S\sqrt{3} \leq r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$
$$p\sqrt{3} \leq 4R + r \Leftrightarrow 3p^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** obținem

$$3p^2 \leq 12R^2 + 12Rr + 9r^2$$

Este suficient să arătăm că

$$12R^2 + 12Rr + 9r^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2 \Leftrightarrow R^2 \geq Rr + 2r^2 \Leftrightarrow (R-2r)(R+r) \geq 0$$

care este adevărată dacă ținem seama de **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

În continuare prezentăm o aplicație a inegalității **Finsler-Hadwiger** din Gazeta Matematică.

2. În orice triunghi avem

$$\sum \left(a^2 - bc\cos A\right)^2 \geq 4S^2$$

(M.Grumăzescu, G.M. 1941, p.99)

Soluție. Înlocuind $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și analoagele, obținem

$$\sum \left(a^2 - bc\cos A\right)^2 = \sum \left(\frac{3a^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

Folosind **Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz** avem

$$\sum \left(\frac{3a^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\sum \frac{3a^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\left(\sum a^2\right)^2$$

iar din **Inegalitatea Finsler-Hadwiger** deducem că

$$\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}S .$$

Atunci

$$\sum \left(a^2 - bc\cos A\right)^2 \geq 4S^2 .$$

3. În orice triunghi avem

$$\left(\sum \cos A\right)^2 + 16\left(\prod \sin A\right)^2 \leq 9$$

(Panagiote Ligouras, La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola)

Soluție. Folosim identitățile geometrice

$$\sum \cos A = \frac{R+r}{R} \text{ și } \prod \sin A = \frac{pr}{2R^2}.$$

Avem

$$\left(\sum \cos A\right)^2 + 16\left(\prod \sin A\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{R+r}{R}\right)^2 + 16\left(\frac{pr}{2R^2}\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow$$
$$R^2(R+r)^2 + 4p^2r^2 \leq 9R^4 \Leftrightarrow 4p^2r^2 \leq R^2\left(8R^2 - 2Rr - r^2\right).$$

Pentru a demonstra ultima inegalitate, folosind **Inegalitatea Gerretsen**

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

și ținând seama de **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$ este suficient să arătăm că

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2 \Leftrightarrow 2R^2 \geq 3Rr + 2r^2.$$

Folosind din nou **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$**,** avem

$$2R^2 \geq 4Rr = 3Rr + Rr \geq 3Rr + 2r^2$$

și soluția se încheie.

4. În orice triunghi avem

$$\frac{r}{R} \leq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(Dorin Andrica, Olimpiada de Matematică din România, 1985)

Soluție. Folosind egalitățile

$$\prod a = 4pRr \text{ și } \prod (a+b) = 2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)$$

inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\frac{r}{R} \leq \frac{16pRr}{2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)}$$

care se scrie

$$p^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2$$

iar finalul soluției este identic cu cel din souția inegalității anterioare.

Acum, folosind prima formă a inegalității **Gerretsen**, vom demonstra o inegalitate prezentă într-un articol din **Revista Matematică din Timișoara, nr. 1/1990**.

5. Arătați că în orice triunghi

$$4S \le \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Soluție. Avem

$$4S \le \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 4S \le \frac{3\cdot 4SR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \le 9R^2.$$

Ultima inegalitate este cunoscută, dar aplicând inegalitățile **Gerretsen** și **Euler** se obține ușor. Într-adevăr avem

$$a^2+b^2+c^2 \le 8R^2+4r^2 \le 8R^2+R^2 = 9R^2.$$

Observație. Din **Inegalitate Cauchy-Buniakovski-Schwarz** rezultă

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)$$

care împreună cu $4S \le \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ duce la

$$4S\sqrt{3} \le \frac{9abc}{a+b+c}$$ **(T.R. Curry)**.

Următoarele două inegalități au fost propuse în revista ieșeană **Recreații Matematice**.

6. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{9\left(9R^2-p^2\right)}{9Rr} \ge \sum \frac{\cos^2 A}{\sin B\cdot \sin C} \ge 1$$

(I.V. Maftei și Dorel Băițan)

Soluție. Folosind relațiile

$$\sum \frac{1}{\sin B\cdot \sin C} = \frac{2R}{r},\ \prod \sin A = \frac{pr}{2R^2} \text{ și } \sum \sin^3 A = \frac{p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4R^3}$$

avem

$$\sum \frac{\cos^2 A}{\sin B \cdot \sin C} = \sum \frac{1-\sin^2 A}{\sin B \cdot \sin C} = \sum \frac{1}{\sin B \cdot \sin C} - \frac{1}{\prod \sin A} \cdot \sum \sin^3 A =$$
$$\frac{2R}{r} - \frac{2R^2}{pr} \cdot \frac{p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{4R^3} = \frac{4R^2 + 6Rr + 3r^2 - p^2}{2Rr}.$$

Atunci, pentru inegalitatea din dreapta avem

$$\frac{4R^2 + 6Rr + 3r^2 - p^2}{2Rr} \geq 1 \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

care este exact **Inegalitatea Gerretsen**.

Pentru inegalitatea din stânga avem

$$\frac{2\left(9R^2 - p^2\right)}{9Rr} \geq \frac{4R^2 + 6Rr + 3r^2 - p^2}{2Rr} \Leftrightarrow 5p^2 \geq 54Rr + 27r^2$$

Pentru a demonstra ultima inegalitate folosim inegalitatea cunoscută:

$$p^2 \geq 14Rr - r^2.$$

Avem

$$5p^2 \geq 70Rr - 5r^2$$

și este suficient să arătăm că

$$70Rr - 5r^2 \geq 54Rr + 27r^2 \Leftrightarrow Rr \geq 2r^2$$

evidentă dacă ținem seama de **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

7. Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea

$$\frac{\left(\sum ctgA\right)^3}{\prod (ctgA + ctgB)} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(1 + \prod \cos A\right)^3}{\prod \sin A}$$

(Gheorghe Costovici)

Soluție. Vom folosi identitățile

$$\sum ctgA = \frac{p^2 - r(4R+r)}{2pr}, \prod (ctgA + ctgB) = \frac{2R^2}{pr}, \prod \sin A = \frac{pr}{2R^2} \text{ și } \prod \cos A = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$$

Înlocuind în inegalitatea din enunț, obținem

$$\frac{\left[p^2 - r(4R+r)\right]^3 pr}{16p^3r^3R^2} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\left[1 + \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}\right]^3 \cdot 2R^2}{pr}$$

echivalentă cu

$$\frac{\left(p^2-4Rr-r^2\right)^3}{16p^2r^2R^2}\geq\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(p^2-4Rr-r^2\right)^3\cdot 2R^2}{64R^6pr}$$

și cu inegalitatea cunoscută

$$S\leq\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Să demonstrăm inegalitatea $S\leq\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ pornind de la **Inegalitatea Gerretsen**.

Avem

$$S\leq\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\Leftrightarrow p\leq\frac{3\sqrt{3}R^2}{4r}\Leftrightarrow p^2\leq\frac{27R^4}{16r^2}$$

Dar $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ **(Gerretsen)** și este suficient să dovedim că

$$\frac{27R^4}{16r^2}\geq 4R^2+4Rr+3r^2$$

Într-adevăr

$$\frac{27R^4}{16r^2}\geq\frac{27R^4}{4R^2}=\frac{27R^2}{4}=4R^2+2R^2+\frac{3R^2}{4}\geq 4R^2+4Rr+3r^2$$

unde am folosit **Inegalitatea Euler** $R\geq 2r$.

Următoarea problemă a fost propusă recent într-o revistă din Kosovo.

8. Demonstrați că

$$\frac{r}{2r+R}\leq\sqrt[3]{\prod\frac{a}{b+c+2a}}\leq\frac{1}{4}$$

(Mathproblems, Mathcontest section, problema 25)

Soluție. Folosind inegalitatea mediilor obținem

$$\frac{3}{\sum\frac{2p+a}{a}}\leq\sqrt[3]{\prod\frac{a}{b+c+2a}}\leq\frac{\sum\frac{a}{2p+a}}{3}$$

Dar $\sum\frac{2p+a}{a}=2p\sum\frac{1}{a}+3$ și folosind egalitatea $\sum\frac{1}{a}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}$ obținem

$\sum\frac{2p+a}{a}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{2Rr}$. Pentru a demonstra inegalitatea din stânga este suficient să arătăm că

$$\frac{6Rr}{p^2+r^2+10Rr} \geq \frac{r}{2r+R} \Leftrightarrow p^2 \leq 6R^2+2Rr-r^2$$

Dar $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ **(Gerretsen)** și

$$4R^2+4Rr+3r^2 \leq 6R^2+2Rr-r^2 \Leftrightarrow 2R^2 \geq 2Rr+4r^2$$

Folosind **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$ avem

$$2R^2 = R^2+R^2 \geq 2Rr+4r^2.$$

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta este suficient să dovedim că

$$\frac{\sum \frac{a}{2p+a}}{3} \leq \frac{1}{4}.$$

Consinderăm funcția $f(x)=\frac{x}{2p+x}$, concavă pe $(0,p)$, $f''(x)=-\frac{4p}{(2p+x)^3}<0, \forall x \in (0,p)$

Folosind **Inegalitatea Jensen** avem

$$\frac{\sum \frac{a}{2p+a}}{3} \leq \frac{\frac{2p}{3}}{2p+\frac{2p}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Bibliografie:

[1] **Constantin C. Florea, Corina Daniela C. Florea,** ***Abordare globală a geometriei triunghiului cu implicații creative,*** **Ed. All, București, 1996;**

[2] **Pantelimon George Popescu, I.V. Maftei, Jose Luis Diaz-Barrero, Marian Dincă,** ***Inegalități matematice. Modele inovatoare*****, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 2007.**

8. CÂTEVA CONSIDERAŢII PRIVIND MATRICELE

Dr.Ing.Stănculescu Adrian

I. Prezentul material se referă la metode matematice destinate a uşura mersul calculelor in operaţiile cu matrice.

În speţă este cunoscută operaţia de înmulţire a două matrici pătratice de configuraţie (m,m) cu m linii şi m coloane de forma :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Rezultatul înmulţirii va fi tot o matrice pătratică de tipul (m,m) de urmatoarea configuraţie :

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \cdots & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + & \cdots & a_{11}b_{1m} + \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \cdots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + & \cdots & a_{21}b_{1m} + \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + a_{m3}b_{31} & \cdots & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + & \cdots & a_{m1}b_{1m} + \cdots \end{pmatrix}$$

Astfel metoda de înmulţire a două matrici este destul de uşoară şi se face după o schemă clasică în cruce.

Problema se complică dacă avem de înmulţit două matrici care nu apar în configuraţia arătată mai sus. Astfel dacă avem spre exemplu de efectuat următoarea înmulţire : o matrice(m,n) x o matrice (n,n) ca în exemplul următor unde m = 2 si n =3 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Rezultatul înmulţirii va fi o matrice de tipul (m,n) şi anume :

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

În cele ce urmează se propune o metodă uşoară care permite înmulţirea a două matrici intre ele indiferent de configuraţia acestora.

Înainte de a trece la dezvoltarea metodei în sine, vom defini grupul (**G**,$*$) guvernat de o lege de forma : $\mathbf{G} * \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{X} * \mathbf{Y}$, şi în care **X** este un element al matricelor care se înmulţesc, iar **Y** este un element simbol fără semificaţie valorică.

Astfel putem scrie că : $\mathbf{X} * \mathbf{Y} = \mathbf{Y} * \mathbf{X} = \mathbf{Y}$

Elementele sunt poziţionate în matricile care se înmulţesc de aşa manieră încât să completeze liniile şi coloanele acestor matrice rezultând în final două matrice pătratice.

Astfel având de înmulţit două matrice de formă pătratică, fiecare operaţie de înmulţire a acestor două matrice se efectuează după metoda clasică şi dacă ℓ reprezintă un termen din matrice, operaţia de înmulţire $\ell * \mathbf{Y}$ ca rezultat nu are valoare deci la sfârşitul operaţiei de înmulţire se elimină din rezultat.

Vom exemplifica această metodă în cele ce urmează si anume :

Având de înmulţit două matrice ca mai jos :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Completăm ultima linie cu simbolurile **Y** şi formăm astfel o matrice pătratică de tipul (m,m). Astfel că avem acum de înmulţit două matrici pătratice între ele, care se pot înmulţi după metoda clasică.

Rezultă matricea :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Din care în final eliminăm simbolurile **Y** şi obţinem matricea rezultat :

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ \underbrace{\boldsymbol{Y}b_{11} + \boldsymbol{Y}b_{21} + \boldsymbol{Y}b_{31}}_{\boxed{\text{Fără valoare sau semificaţie}}} & \underbrace{\boldsymbol{Y}b_{12} + \boldsymbol{Y}b_{22} + \boldsymbol{Y}b_{32}}_{\boxed{\text{Fără valoare sau semificaţie}}} & \underbrace{\boldsymbol{Y}b_{13} + \boldsymbol{Y}b_{23} + \boldsymbol{Y}b_{33}}_{\boxed{\text{Fără valoare sau semificaţie}}} \end{pmatrix}$$

care se reduce la următorul rezultat :

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

Un alt exemplu :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Conform procedeului se scrie astfel :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Sau :

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ \boldsymbol{Y}b_{11}+\boldsymbol{Y}b_{21}+\boldsymbol{Y}b_{31} & \boldsymbol{Y}b_{12}+\boldsymbol{Y}b_{22}+\boldsymbol{Y}b_{32} & \boldsymbol{Y}b_{13}+\boldsymbol{Y}b_{23}+\boldsymbol{Y}b_{33} \\ \boldsymbol{Y}b_{11}+\boldsymbol{Y}b_{21}+Y b_{31} & \boldsymbol{Y}b_{12}+Y b_{22}+Y b_{32} & \boldsymbol{Y}b_{13}+\boldsymbol{Y}b_{23}+\boldsymbol{Y}b_{33} \end{pmatrix}$$

Care conform procedeului, eliminând termenii care conţin simbolul **Y** rezultă :

$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \quad a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \quad a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{1}$

Prin acest sistem transformând orice matrice într-o matrice pătratică putem realiza o operaţie de înmulţire cu multă uşurinţă.

Exemplu : presupunem că avem de efectuat următoarea operaţie

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

După procedeul propus înmulţirea devine :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{pmatrix} 1*(-1)+3*3+4*(-2) & 1*2+3*1+4*0 & 1*0+3*1+4*1 \\ \boldsymbol{Y}*(-1)+\boldsymbol{Y}*3+\boldsymbol{Y}*(-2) & \boldsymbol{Y}*2+\boldsymbol{Y}*1+\boldsymbol{Y}*0 & \boldsymbol{Y}*0+\boldsymbol{Y}*1+\boldsymbol{Y}*1 \\ \boldsymbol{Y}*(-1)+\boldsymbol{Y}*3+\boldsymbol{Y}*(-2) & \boldsymbol{Y}*2+\boldsymbol{Y}*1+\boldsymbol{Y}*0 & \boldsymbol{Y}*0+\boldsymbol{Y}*1+\boldsymbol{Y}*1 \end{pmatrix}$$

ignorând termenii care conţin **Y** obţinem :

$$\begin{pmatrix} 1*(-1)+3*3+4*(-2) & 1*2+3*1+4*0 & 1*0+3*1+4*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

II. O altă aplicaţie constă în realizarea mai uşoară a unei matrice inversabilă. Astfel, după metoda clasică considerând o matrice de forma :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şi dorim să obţinem matricea inversă M^{-1}, alcătuim mai întâi matricea transpusă M^T, care arată astfel :

$$M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

În etapa următoare formăm din matricea transpusă matricea adjunctă care arata astfel :

$$M^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

În această matrice minorii d_{ij} reprezintă un complement algebric obţinut prin tăierea liniei *i* si a coloanei *j* din matricea transpusă iar aceşti minori se înmulţesc cu $(-1)^{(i+j)}$.

Spre exemplu, d_{23} se obţine prin tăierea din matricea initială a lininiei 2 şi coloanei 3, obţinându-se un minor care se înmulţeşte cu $(-1)^{(2+3)}$, iar matricea inversă este egală cu :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} M^*$$

în care Δ reprezintă determinantul matricii iniţiale.

Cu alte cuvinte, pentru a obţine matricea adjunctă , alcătuim mai întâi matricea transpusă , după care extragem din această matrice minorii d_{ij} şi formăm apoi complemenţii algebrici prin înmulţirea minorilor d_{ij} cu $(-1)^{(i+j)}$.

Prin prezentul articol se propune o metoda mai simplă de a obţine matricea adjunct direct din matricea initială fără a mai fi nevoie de să realizăm matricea transpusă.

În această situaţie această matrice va arăta astfel :

$$M^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & \cdots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & \cdots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & d_{3n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

în care d_{ij} reprezintă minorul obţinut prin tăierea liniei *i* si a coloanei *j* înmulţit cu $(-1)^{(i+j)}$ operaţia fiind făcută direct din matricea iniţială.

Vom ilustra metoda propusă printr-un exemplu. Fie matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se solicită să calculăm inversa sa. După procedeul clasic, calculăm mai întâi matricea transpusă prin inversarea liniilor cu coloanele.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Apoi calculăm matricea adjunctă :

$$A^* = \begin{pmatrix} 15 & 2 & -8 \\ -15 & 1 & -4 \\ -15 & 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

iar matricea inversă este egală cu :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^* = \frac{1}{45} * \begin{pmatrix} 15 & 2 & -8 \\ -15 & 1 & -4 \\ -15 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

După procedeul propus, paşii de obţinere a matricei inverse sunt aceiaşi cu deosebirea că nu se mai calculează matricea transpusă iar matricea adjunctă de obţine direct din matricea initială şi anume :

$$A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}$$

semificaţia complemenţilor algebrici d_{ij} fiind aceiaşi şi anume :

$$A^* = \begin{pmatrix} 15 & 2 & -8 \\ -15 & 1 & -4 \\ -15 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

de exemplu complementul algebric d_{21} fiind obţinut prin tăierea din matricea initială a liniei 2 şi coloanei 1, determinantul astfel obţinut înmulţindu-se în final cu $(-1)^{(2+1)}$ iar matricea inversă va fi egală cu :

$$A^{-1} = \frac{1}{45} * \begin{pmatrix} 15 & 2 & -8 \\ -15 & 1 & -4 \\ -15 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

9. CÂTEVA APLICAŢII PRIVIND CALCULUL UNOR LIMITE

Dr.Ing.Stănculescu Adrian

O aplicaţie se referă la calcularea limitelor laterale. În concret pentru a calcula o limită laterală conform procedeului propus, se introduce o variantă auxiliară **ε** de valoare foarte mică, putem scrie în acest context că tinde la zero. Această valoare foarte mica face diferenţierea intre limita laterală dreapta şi limita laterală stânga.

Vom descrie metoda prin exemple.

Astfel dacă avem de verificat continuitatea funcţiei $f(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ în punctul x=1, după metoda clasică vom calcula limitele laterale astfel :

$$\mathrm{ld}_{\substack{x\to 1 \\ x\searrow 1}} f(x) = \lim \mathrm{d}_{x\searrow 1} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \infty \ ;$$

$$\mathrm{ls}_{\substack{x\to 1\\ x\nearrow 1}} f(x) = \lim{}_{\mathrm{s}\, x\nearrow 1} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = -\infty$$

După metoda propusă in acest articol, se diferenţiază aceste limite prin introducerea variabilei ε de o valoare foarte mică în felul următor :

$$\mathrm{ld}_{\substack{x\to 1\\ x=1+\varepsilon\\ \varepsilon\ll}} f(x) = \lim_{\substack{x=1+\varepsilon\\ \varepsilon\ll}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2(1+\varepsilon)-1}{2\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon}} = \infty \;;$$

$$\mathrm{ls}_{\substack{x\to 1\\ x=1-\varepsilon\\ \varepsilon\ll}} f(x) = \lim_{\substack{x=1-\varepsilon\\ \varepsilon\ll}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-2\varepsilon+1}{2\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon}} = -\infty \;;$$

În acest fel calculul limitelor laterale este mai uşor de aplicat. Un alt exemplu constă în calcularea limitelor pentru x tinzând la o valoare negativă, de regula x tinde la $-\infty$ ca în exemplul de mai jos :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1}$$

În acest caz este mai sugestiv să se utilizeze o variabilă auxiliară $t = -x$, care să tindă spre $+\infty$ şi anume :

$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{-t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t(-t+1)}$ care evident tinde către zero.

Bineînteles că prin materialul prezentat au fost exemplificate metodele propuse dar aceste metode nu sunt limitative si ele pot fi extinse şi pentru alte cazuri, constituind metode practice cu rezultate sigure şi imediate.

10. PROBLEMA LUNII MAI 2012

www.mateinfo.ro

Fie *m, n, p* numere reale nenule astfel ca $m + n > 0, n + p > 0, p + n > 0$ şi $mn + np + pm = 0$.

(*i*) Să se demonstreze că există un triunghi Δ cu laturile de lungimi *a, b, c* dacă şi numai dacă există un triunghi Δ_1 cu laturile de lungimi $c_1, b_1, a_1 > 0$, unde

$$c_1^2 = ma^2 + nb^2 + pc^2,\ b_1^2 = mc^2 + na^2 + pb^2,\ a_1^2 = mb^2 + nc^2 + pa^2.$$

(*ii*) Să se demonstreze că triunghiurile Δ şi Δ_1 sunt asemenea (cu laturile considerate în ordinea de la (*i*)) dacă şi numai dacă

$$(m+n)b^2 = mc^2 + na^2.$$

Prof. Corneliu Mănescu-Avram

Soluţie autor :

(*i*) Se ştie că există un triunghi cu laturile de lungimi *a, b, c* > 0 dacă şi numai dacă

$$E = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) > 0.$$

Calcule directe arată că

$$E_1 = 2(a_1^2b_1^2 + b_1^2c_1^2 + c_1^2a_1^2) - (a_1^4 + b_1^4 + c_1^4) = (m^2 + n^2 + p^2)E,$$

deci expresiile *E* şi E_1 au acelaşi semn, astfel că există triunghiul Δ dacă şi numai dacă există triunghiul Δ_1.

(*ii*) "⇒" Scriem că lungimile laturilor sunt proporţionale $\frac{a}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{a_1}$ şi deducem

$\frac{a^2}{c_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{a_1^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c_1^2 + b_1^2 + a_1^2} = \frac{1}{m+n+p}$, de unde $(m+n+p)b^2 = b_1^2 = mc^2 + na^2 + pb^2$ şi se obţine egalitatea din enunţ.

"⇐" Din $(m+n)b^2 = mc^2 + na^2$ se deduce $c_1^2 = ma^2 + nb^2 + pc^2 = ma^2 + n\,\frac{mc^2+na^2}{m+n} + pc^2 = \frac{(m^2+mn+n^2)a^2}{m+n} = (m+n+p)a^2$. Asemănător rezultă şi proporţionalitatea lungimilor celorlalte două perechi de laturi.

Comentariu. Dacă $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{-1}{4}$, atunci laturile triunghiului Δ_1 sunt medianele triunghiului Δ , iar aceste triunghiuri sunt asemenea dacă şi numai dacă pătratele lungimilor laturilor triunghiului Δ sunt în progresie aritmetică. Un triunghi cu această proprietate se numeşte *automedian*.

Alte soluţii

1) Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Şcolar „Al. Vlahuţă" Şendriceni, jud. Botoşani

Observaţie. Condiţiile $m+n>0$, $n+p>0$, $p+m>0$ şi $mn+np+pm=0$ implică faptul că doar unul dintre parametrii m,n,p este negativ precum şi faptul că $m+n+p>0$.

(i) $(\Rightarrow)$ Presupunem că există un triunghi Δ cu laturile a, b şi c. Trebuie să demonstrăm că există un triunghi Δ_1 cu laturile a_1, b_1, c_1 adică trebuie să arătăm:

$$a_1, b_1, c_1>0, \qquad a_1+b_1>c_1; \quad a_1+c_1>b_1; \quad b_1+c_1>a_1 \qquad (1)$$

Vom arăta că, de exemplu, $c_1>0$ şi $a_1+b_1>c_1$, relaţiile analoage presupun demonstraţii similare.

$$c_1>0 \Leftrightarrow ma^2+nb^2+pc^2>0 \overset{mn+np+pm=0}{\Leftrightarrow} \frac{-np}{n+p}a^2+nb^2+pc^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -npa^2+n^2b^2+pnb^2+npc^2+p^2c^2>0 /:n^2 \Leftrightarrow \left(-\frac{p}{n}\right)a^2+$$

$$+b^2+\frac{p}{n}b^2+\frac{p}{n}c^2+\left(\frac{p}{n}\right)c^2>0 \overset{\frac{p}{n}=t}{\Leftrightarrow} c^2t^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)t+b^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow \left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2<0 \Leftrightarrow \left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(b-c)^2-a^2\right]\left[\left[(b+c)^2-a^2\right]\right]<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{b-c-a}_{<0}\right)\left(\underbrace{b-c+a}_{>0}\right)\left(\underbrace{b+c-a}_{>0}\right)\left(\underbrace{b+c+a}_{>0}\right)<0 \qquad (A)$$

Din faptul că există triunghiul Δ cu laturile a, b şi c înseamnă că:

$$a+b>c; \quad a+c>b; \quad b+c>a \qquad (2)$$

Avem de demonstrat:

$$a_1+b_1>c_1 \Leftrightarrow \sqrt{mb^2+nc^2+pa^2}+\sqrt{mc^2+na^2+pb^2}>\sqrt{ma^2+nb^2+pc^2} \qquad (3)$$

Pentru demonstrarea inegalităţii (3) vom aplica inegalitatea lui ***Minkowski*** (M) şi inegalităţile (2).

$$\sqrt{mb^2+nc^2+pa^2}+\sqrt{mc^2+na^2+pb^2}=\sqrt{\left(b\sqrt{m}\right)^2+\left(c\sqrt{n}\right)^2+\left(a\sqrt{p}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(c\sqrt{m}\right)^2+\left(a\sqrt{n}\right)^2+\left(b\sqrt{p}\right)^2}\overset{(M)}{\geq}$$
$$\geq\sqrt{\left[\sqrt{m}(b+c)\right]^2+\left[\sqrt{n}(a+c)\right]^2+\left[\sqrt{p}(a+b)\right]^2}=$$
$$=\sqrt{m(b+c)^2+n(a+c)^2+p(a+b)^2}\overset{(2)}{>}\sqrt{ma^2+nb^2+pc^2} \qquad \square$$

$(\Leftarrow)$ Presupunem că există un triunghi Δ_1 cu laturile a_1, b_1 şi c_1. Trebuie să demonstrăm că există un triunghi Δ cu laturile $a, b, c,$ adică trebuie să arătăm:

$$a,\ b,\ c>0, \qquad a+b>c; \quad a+c>b; \quad b+c>a \tag{4}$$

Vom arăta că, de exemplu, $a>0$ şi $a+b>c$, relaţiile analoage presupun demonstraţii similare.

Vom afla pe a,b,c din egalităţile de la (i) rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} ma^2+ & nb^2+ & pc^2 & = & c_1^2 \\ na^2+ & pb^2+ & mc^2 & = & b_1^2 \\ pa^2+ & mb^2+ & nc^2 & = & a_1^2 \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului este:

$$d=\begin{vmatrix} m & n & p \\ n & p & m \\ p & m & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m+n+p & m+n+p & m+n+p \\ n & p & m \\ p & m & n \end{vmatrix}=(m+n+p)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & p & m \\ p & m & n \end{vmatrix}=$$
$$=(m+n+p)\left(\underbrace{pn+mn+mp}_{=0}-p^2-m^2-n^2\right)=(m+n+p)\left(0-\left(p^2+m^2+n^2\right)\right)=$$
$$=-(m+n+p)\left[(m+n+p)^2-2\left(\underbrace{mn+mp+np}_{=0}\right)\right]=-(m+n+p)^3\neq 0$$

Din formulele lui Cramer rezultă:

$$a^2=\frac{d_{a^2}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} c_1^2 & n & p \\ b_1^2 & p & m \\ a_1^2 & m & n \end{vmatrix}}{-(m+n+p)^3}=\frac{\left(m^2-pn\right)c_1^2+\left(n^2-mp\right)b_1^2+\left(p^2-mn\right)a_1^2}{(m+n+p)^3}$$

$$b^2=\frac{d_{b^2}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} m & c_1^2 & p \\ n & b_1^2 & m \\ p & a_1^2 & n \end{vmatrix}}{-(m+n+p)^3}=\frac{(n^2-mp)c_1^2+(p^2-mn)b_1^2+(m^2-pn)a_1^2}{(m+n+p)^3}$$

$$c^2=\frac{d_{c^2}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} m & n & c_1^2 \\ n & p & b_1^2 \\ p & m & a_1^2 \end{vmatrix}}{-(m+n+p)^3}=\frac{(p^2-mn)c_1^2+(m^2-pn)b_1^2+(n^2-pm)a_1^2}{(m+n+p)^3}$$

Arătăm că expresiile pentru a^2, b^2 şi c^2 sunt pozitive, pentru a exista a^2, b^2 şi c^2.

Este suficient să arăt, de exemplu, că numărătorul de la a^2 este pozitiv, restul admiţând demonstraţii similare.

$$(m^2-pn)c_1^2+(n^2-mp)b_1^2+(p^2-mn)a_1^2>0\overset{mn+pn+pm=0}{\Leftrightarrow}(m^2+mp+mn)c_1^2+$$
$$+(n^2+np+nm)b_1^2+(p^2+pm+pn)a_1^2>0\Leftrightarrow(m+n+p)(mc_1^2+nb_1^2+pa_1^2)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow mc_1^2+nb_1^2+pa_1^2>0\Leftrightarrow m(ma^2+nb^2+pc^2)+n(mc^2+na^2+pb^2)+$$
$$+p(mb^2+nc^2+pa^2)>0\Leftrightarrow m^2a^2+mnb^2+mpc^2+nmc^2+n^2a^2+npb^2+$$
$$+pmb^2+pnc^2+p^2a^2>0\Leftrightarrow(m^2+n^2+p^2)a^2+\left(\underbrace{mn+mp+np}_{=0}\right)(b^2+c^2)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(m^2+n^2+p^2)a^2>0 \qquad (A)$$

Demonstrăm, în fine, că: $a+b>c$.

$$a+b=\sqrt{(m^2-pn)c_1^2+(n^2-mp)b_1^2+(p^2-mn)a_1^2}+$$
$$+\sqrt{(n^2-mp)c_1^2+(p^2-mn)b_1^2+(m^2-pn)a_1^2}=$$
$$=\sqrt{\left[c_1\sqrt{m^2-pn}\right]^2+\left[b_1\sqrt{n^2-mp}\right]^2+\left[a_1\sqrt{p^2-mn}\right]^2}+$$
$$+\sqrt{\left[c_1\sqrt{n^2-mp}\right]^2+\left[b_1\sqrt{p^2-mn}\right]^2+\left[a_1\sqrt{m^2-pn}\right]^2}\overset{(M)}{\geq}$$
$$\geq\sqrt{\left[\sqrt{m^2-pn}(c_1+a_1)\right]^2+\left[\sqrt{n^2-mp}(b_1+c_1)\right]^2+\left[\sqrt{p^2-mn}(a_1+b_1)\right]^2}>$$
$$>\sqrt{b_1^2(m^2-pn)+a_1^2(n^2-mp)+c_1^2(p^2-mn)}=c \qquad \square$$

(ii) $(\Rightarrow)$ Din asemănarea triunghiurilor Δ şi Δ_1 rezultă proporţionalitatea laturilor, adică:

$$\Delta_1\sim\Delta\Rightarrow\frac{c_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{a_1}{c}\Rightarrow\left(\frac{c_1}{a}\right)^2=\left(\frac{b_1}{b}\right)^2=\left(\frac{a_1}{c}\right)^2=\frac{c_1^2+b_1^2+a_1^2}{a^2+b^2+c^2}=m+n+p\,.$$

$$\left(\frac{b_1}{b}\right)^2=m+n+p\Rightarrow\frac{b_1^2}{b^2}=m+n+p\Rightarrow\frac{mc^2+na^2+pb^2}{b^2}=m+n+p\Rightarrow$$

$$m\frac{c^2}{b^2}+n\frac{a^2}{b^2}+p=m+n+p\Rightarrow m\frac{c^2}{b^2}+n\frac{a^2}{b^2}=m+n\ /\cdot b^2\Rightarrow mc^2+na^2=(m+n)b^2\ \square$$

$(\Leftarrow)$

Avem $(m+n)b^2=mc^2+na^2$ şi vom calcula pătratul raporturilor laturilor celor două triunghiuri.

$$(m+n)b^2=mc^2+na^2\Rightarrow m+n=m\frac{c^2}{b^2}+n\frac{a^2}{b^2}\qquad(3)$$

Dar, $\left(\frac{b_1}{b}\right)^2=\frac{b_1^2}{b^2}=\frac{mc^2+na^2+pb^2}{b^2}=m\frac{c^2}{b^2}+n\frac{a^2}{b^2}+p\overset{(3)}{=}m+n+p\qquad(4)$

Pentru a calcula şi celelalte două rapoarte şi a arăta că ele sunt egale, vom utiliza, pe lângă relaţia dată, şi $mn+np+pm=0$.

$$mn+np+pm=0\Rightarrow m(n+p)=-np\Rightarrow m=\frac{-np}{n+p}\qquad(5)$$

$$\left(\frac{a_1}{c}\right)^2=\frac{a_1^2}{c^2}=\frac{mb^2+nc^2+pa^2}{c^2}=m\frac{b^2}{c^2}+n+p\frac{a^2}{c^2}\qquad(6)$$

Din $(m+n)b^2=mc^2+na^2$ prin împărţirea cu c^2 va rezulta:

$$(m+n)b^2=mc^2+na^2/:c^2\Rightarrow m\frac{b^2}{c^2}+n\frac{b^2}{c^2}=m+n\frac{a^2}{c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{b^2}{c^2}=m+n\frac{a^2}{c^2}-n\frac{b^2}{c^2}\qquad(7)$$

Înlocuind (7) în (6), avem:

$$\frac{a_1^2}{c^2}=m\frac{b^2}{c^2}+n+p\frac{a^2}{c^2}\overset{(7)}{=}m+n\frac{a^2}{c^2}-n\frac{b^2}{c^2}+n+p\frac{a^2}{c^2}=m+n+\frac{(n+p)a^2-nb^2}{c^2}\qquad(8)$$

Pentru a calcula $\frac{(n+p)a^2-nb^2}{c^2}$, vom utiliza relaţia dată $(m+n)b^2=mc^2+na^2$ şi (5).

$$(m+n)b^2=mc^2+na^2\Rightarrow\frac{-npb^2}{n+p}+nb^2=\frac{-np}{n+p}c^2+na^2/\cdot(n+p)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -npb^2+n^2b^2+npb^2=-npc^2+n^2a^2+npa^2\Rightarrow n^2b^2+npc^2=n^2a^2+npa^2/:n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow nb^2+pc^2=(n+p)a^2\Rightarrow(n+p)a^2-nb^2=pc^2\qquad(9)$$

În fine, $\frac{a_1^2}{c^2}=m+n+\frac{(n+p)a^2-nb^2}{c^2}\overset{(9)}{=}m+n+\frac{pc^2}{c^2}=m+n+p\qquad(11)$

Un procedeu absolut similar cu cel anterior, ne va conduce la:

$$\frac{c_1^2}{a^2}=m+n+p\qquad(12)$$

Relaţiile (4), (11) şi (12) rezolvă cerinţa.

Fie m, n, p numere reale nenule astfel ca $m+n>0,\ n+p>0,\ p+m>0$ şi

$mn+np+pm=0.$

(i) Să se demonstreze că există un triunghi Δ cu laturile de lungimi $a,\ b,\ c$ dacă şi numai dacă există un triunghi Δ_1 cu laturile de lungimi $c_1,\ b_1,\ a_1>0$, unde

$$c_1^2=ma^2+nb^2+\ pc^2,\ \ b_1^2=mc^2+\ na^2+\ pb^2,\ \ a_1^2=mb^2+\ nc^2+\ pa^2.$$

(ii) Să se demonstreze că triunghiurile Δ şi Δ_1 sunt asemenea (cu laturile considerate în ordinea de la (i)) dacă şi numai dacă

$$(m+n)b^2=mc^2+\ na^2.$$

2. Prof. Biro Istvan, Sannicolau Mare

Lema: *Fie x, y,z numere reale strict pozitive. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) x, y,z pot fi lungimile unui triunghi;

(2) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2>2\left(x^4+y^4+z^4\right).$

Demonstraţie: *Se verifică prin calcul simplu că relaţia (2) este echivalentă cu*

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)>0,$$

prin urmare $(1)\Rightarrow(2)$ *este evidentă, iar* $(2)\Rightarrow(1)$ *are loc deoarece toţi factorii produsului sunt strict pozitive, în caz contrar din ultimii trei factori doi obligatoriu trebuie să fie negative ceea ce înseamnă că nu sunt îndeplinite condiţiile iniţiale, de exemplu din* $x-y+z<0$ *şi* $x+y-z<0$ *prin adunare rezultă* $x<0$*, absurd.*

Având în vedere condiţiile date, din $m+n>0, n+p>0, p+m>0$ rezultă $m+n+p>0$ şi din $mn+np+pm=0$ avem $(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2$ şi $p=-\dfrac{mn}{m+n}$.

(i) Fie triunghiul Δ cu laturile de lungimi *a,b,c* şi triunghiul Δ_1 cu laturile de lungimi c_1, b_1, a_1 definite în enunţ.

Observând că

$$a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}=(m+n+p)(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow(a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2})^2=(m+n+p)^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

şi

$$a_1^{\ 4}+b_1^{\ 4}+c_1^{\ 4}=(mb^2+nc^2+pa^2)^2+(mc^2+na^2+pb^2)^2+(ma^2+nb^2+pc^2)^2=(m+n+p)^2(a^4+b^4+$$

, între laturile celor două triunghiuri are loc următoarea relaţie:

$$(a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2})^2-2(a_1^{\ 4}+b_1^{\ 4}+c_1^{\ 4})=(m+n+p)^2\left[(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)\right].$$

În conformitate cu ***Lema*** şi relaţia obţinută, rezultă:

$$\textit{există }\Delta\ \Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)\Leftrightarrow(a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2})^2>2(a_1^{\ 4}+b_1^{\ 4}+c_1^{\ 4})\Leftrightarrow$$

$$\textit{există }\ \Delta_1.$$

(ii) Avem:

$$\Delta\sim\Delta_1\Leftrightarrow\frac{a}{c_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{a_1}\Leftrightarrow\frac{a^2}{c_1^{\ 2}}=\frac{b^2}{b_1^{\ 2}}=\frac{c^2}{a_1^{\ 2}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{c_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+a_1^{\ 2}}=\frac{1}{m+n+p}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1^{\ 2}=a^2(m+n+p) & (1)\\ b_1^{\ 2}=b^2(m+n+p) & (2)\\ a_1^{\ 2}=c^2(m+n+p) & (3)\end{cases}$$

.

$(\Rightarrow)\ \Delta\sim\Delta_1\Rightarrow b_1^{\ 2}=b^2(m+n+p)\Leftrightarrow(m+n)b^2=mc^2+na^2$.

$(\Leftarrow)$ Este suficient să arătăm că $(2)\Rightarrow(1)$ şi $(2)\Rightarrow(3)$, adică din $b^2=\dfrac{mc^2+na^2}{m+n}$ rezultă:

$$nb^2=\frac{mnc^2+n^2a^2-mna^2+mna^2}{m+n}=\frac{mn(c^2-a^2)}{m+n}+na^2=p(a^2-c^2)+na^2\Rightarrow(n+p)a^2=nb^2+pc^2\Leftrightarrow(1)$$

şi

$$mb^2=\frac{m^2c^2+mna^2-mnc^2+mnc^2}{m+n}=\frac{mn(a^2-c^2)}{m+n}+mc^2=p(c^2-a^2)+mc^2\Rightarrow(m+p)c^2=mb^2+pa^2\Leftrightarrow(3)$$

.

3. Prof.Păcurar Cornel-Cosmin,Col. Naț. I.M.C.Blaj

(i)Demonstrăm mai întâi implicația directă , în ipoteza că există triunghiul Δ demonstrăm că există triunghiul Δ_1.

Considerăm că există un triunghi Δ cu laturile de lunimi a,b,c și de aici aplicând teorema cosinusului avem $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$, $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ și $c^2+a^2-b^2=2ca\cos B$.

Știm că $a_1,b_1,c_1>0$ și mn+np+pm=0$\Longrightarrow$mn=−mp−np.

Avem $c_1+b_1>a_1|()^2\Leftrightarrow$

$ma^2+nb^2+pc^2+mc^2+na^2+pb^2+2\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>mb^2+nc^2+pa^2\Leftrightarrow$
$m(c^2+a^2-b^2)+n(a^2+b^2-c^2)+p(b^2+c^2-a^2)+$
$+2\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>0\Leftrightarrow$
$2mca\cos B+2nab\cos C+2pbc\cos A+2\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>0\Leftrightarrow$
$\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>-mca\cos B-nab\cos C-pbc\cos A$,această inegalitate e evidentă dacă $-mca\cos B-nab\cos C-pbc\cos A<0$, în caz contrar ridicând la pătrat obținem echivalența cu $(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)>(mca\cos B+nab\cos C+pbc\cos A)^2$

$\Leftrightarrow m^2a^2c^2+mna^4+mpa^2b^2+mnb^2c^2+n^2a^2b^2+npb^4+pmc^4+pna^2c^2+p^2b^2c^2>$
$>m^2a^2c^2\cos^2B+n^2a^2b^2\cos^2C+p^2b^2c^2\cos^2A+2mna^2bc\cos B\cos C+2mpabc^2\cos A\cos B+$
$+2npab^2c\cos A\cos C\Leftrightarrow m^2a^2c^2\sin^2B+n^2a^2b^2\sin^2C+p^2b^2c^2\sin^2A+mn(a^4+b^2c^2-$
$-2a^2bc\cos B\cos C)+np(b^4+a^2c^2-2ab^2c\cos A\cos C)+mp(c^4+a^2b^2-$
$2abc^2\cos A\cos B)>0$

$\Leftrightarrow m^2a^2c^2\sin^2B+n^2a^2b^2\sin^2C+p^2b^2c^2\sin^2A+np(b^4+a^2c^2-2ab^2c\cos A\cos C-a^4-b^2c^2+$
$+2a^2bc\cos B\cos C)+mp(c^4+a^2b^2-2abc^2\cos A\cos B-a^4-b^2c^2+$
$2a^2bc\cos B\cos C)>0\Leftrightarrow$

$m^2a^2c^2\sin^2B+n^2a^2b^2\sin^2C+p^2b^2c^2\sin^2A+np\left(b^4+a^2c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}{2}-a^4-\right.$
$\left.-b^2c^2+\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2}\right)+mp\left(c^4+a^2b^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2}-a^4-\right.$
$\left.b^2c^2+\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2}\right)>0\Leftrightarrow m^2a^2c^2\sin^2B+n^2a^2b^2\sin^2C+p^2b^2c^2\sin^2A>0$
care este evident,$\Longrightarrow$

$c_1+b_1>a_1$,analog se obține $a_1+b_1>c_1$ și $a_1+c_1>b_1$ .Din ultimele trei inegalități rezultă că există triunghiul Δ_1 cu laturile $a_1,b_1,c_1>0$.

În continuare demonstrăm implicația inversă.Considerăm că există triunghiul Δ_1
$\Longrightarrow c_1+b_1>a_1|()^2\Leftrightarrow$
$ma^2+nb^2+pc^2+mc^2+na^2+pb^2+2\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>mb^2+nc^2+pa^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(ma^2+nb^2+pc^2)(mc^2+na^2+pb^2)}>m(b^2-a^2-c^2)+n(c^2-b^2-a^2)+p(a^2-$
$-c^2-b^2)|()^2\Leftrightarrow m^2a^2c^2\left(1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right)+n^2a^2b^2\left(1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right)+$
$p^2b^2c^2\left(1--\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)>0\Leftrightarrow\frac{m^2}{4ac}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+$
$b)++\frac{n^2}{4ab}(c-a+b)(c++a-b)(a+b-c)(a+b+c)+\frac{p^2}{4bc}(a-c+$
$b)(a+c-b)(c+b-a)(c+b+a)>0\qquad(r_1)$

Fără a restrânge generalitatea rezolvării considerăm $a<b<c\Longrightarrow b+c>a\Longrightarrow b+c-a>0$ și $a+c>b\Longrightarrow a+c-b>0$.

Presupunem $a+b\leq c\Longrightarrow a+b-c\leq 0$.

Ținând cont de b+c−a>0, a+c−b>0 și a+b−c<0 ⟹ (r_1) este falsă⟹ nu există triunghiul Δ_1.Avem o contradicție și de aici rezultă că presupunerea făcută e falsă⟹a+b>c și împreună cu b+c>a și a+c>b⟹ că există triunghiul Δ.

(ii) Demonstrăm mai întâi implicația directă.Considerăm că triunghiurile Δ și Δ_1 cu laturile în ordinea de la (i)$\Rightarrow\frac{a}{c_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{a_1}\,|()^2\Rightarrow\frac{a^2}{ma^2+nb^2+pc^2}=\frac{b^2}{mc^2+na^2+pb^2}=\frac{c^2}{mb^2+nc^2+pa^2}\Rightarrow$

$\frac{a^2}{ma^2+nb^2+pc^2}=\frac{b^2}{mc^2+na^2+pb^2}=\frac{c^2}{mb^2+nc^2+pa^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{(m+n+p)(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{m+n+p}\Rightarrow\frac{b^2}{mc^2+na^2+pb^2}=\frac{1}{m+n+p}\Rightarrow(m+n)b^2=mc^2+na^2$.

În continuare vom demonstra implicația inversă.

Considerăm $(m+n)b^2=mc^2+na^2\,|+pb^2\Rightarrow(m+n+p)b^2=mc^2+na^2+pb^2\Rightarrow$ $\frac{b^2}{b_1^2}=\frac{1}{m+n+p}\,|\sqrt{()}\Rightarrow\frac{b}{b_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}$.

Din mn+np+pm=0⟹$m+n=-\frac{mn}{p}$ și împreună cu

$(m+n)b^2=mc^2+na^2\Rightarrow-mnb^2=mpc^2+npa^2\Rightarrow mpc^2+npa^2+mnb^2=0$ și împreună cu $np=-mn-pm\Rightarrow-mna^2-pma^2+mpc^2+mnb^2=0\,|:m\Rightarrow-na^2-pa^2+pc^2+nb^2=0\Rightarrow(n+p)a^2=pc^2+nn^2\,|+ma^2\Rightarrow(m+n+p)a^2=c_1^2\Rightarrow\frac{a}{c_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}$.În acelați mod se demonstrează $\frac{c}{a_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}$.

Din $\frac{a}{c_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}$, $\frac{b}{b_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}$ și $\frac{c}{a_1}=\frac{1}{\sqrt{m+n+p}}\Rightarrow\frac{a}{c_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{a_1}\Rightarrow\Delta\sim\Delta_1$ în ordinea de la (i).