MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro

(revistă lunară)

DECEMBRIE 2012

ISSN 2065 – 6432

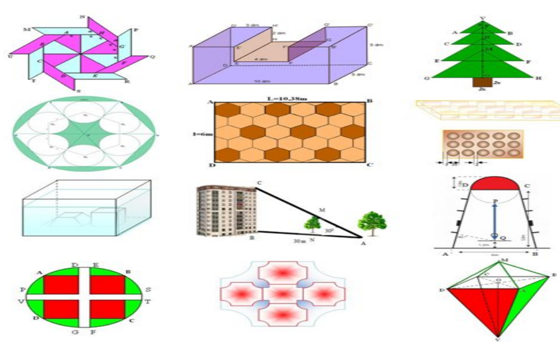
ARTICOLE :

1. Demonstrarea unor inegalități geometrice folosind substituțiile Ravi Pag.2

2. CONCURSUL DE MATEMATICĂ SCLIPIREA MINŢII, 3.11.2012 Pag. 10

3. Rafinări ale problemei L:256 din Sclipirea Minţii, Nr. X – 2012 Pag. 18

4. Trei soluţii pentru problema O.VII.316 din RMT, Nr. 4/2012 Pag. 20



Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

1.Demonstrarea unor inegalități geometrice folosind substituțiile Ravi

Profesor Codreanu Ioan Viorel

Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

În acest articol vom prezenta o metodă de rezolvare a inegalităților geometrice folosind substituțiile ***Ravi*** și inegalități algebrice clasice.

Propoziție. **Numerele** a,b,c **sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă și nuumai dacă există** $x,y,z>0$ **astfel încât** $a=y+z, b=z+x, c=x+y.$

Demonstrație. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, luăm $x=p-a>0, y=p-b>0, z=p-c>0.$ Avem $y+z=p-b+p-c=a$ și analoagele. Reciproc, dacă $a=y+z, b=z+x, c=x+y,$ atunci $2x=b+c-a>0$, adică $a<b+c$ și analoagele, relații ce arată că se poate forma un triunghi de laturi $a,b,c.$

În concluzie dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci pentru orice inegalitate geometrică există o inegalitate algebrică de forma $F(x,y,z)\geq 0$ sau $(\leq,>,<0)$. Substituțiile $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ sunt cunoscute sub denumirea de substituțiile ***Ravi.***

Folosind propoziția vom scrie în funcție de x,y,z unele relații cunoscute din geometria triunghiului.

- $$p=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$$
- $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}$$
- $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}$$
- $$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}$$
- $$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}$$
- $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$$

- $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{x\sum x}{(x+y)(x+z)}}$
- $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{yz}{x\sum x}}$

În continuare vom demonstra câteva inegalități geometrice folosind substituțiile ***Ravi*** și inegalități algebrice clasice. Notațiile sunt cele obișnuite într-un triunghi iar unele enunțuri vor fi ușor modificate.

1. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\prod(h_a-2r)\le r^3$$

Marius Olteanu, Arhimede nr. 9-10, 2003

Soluție. Să exprimăm h_a în funcție de x,y,z. Avem $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{y+z}$ și analoagele. Atunci inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\prod\left(\frac{2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{y+z}-2\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}\right)\le\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}\cdot\prod\left(\frac{\sum x}{y+z}-1\right)\le\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}$$

$$\Leftrightarrow 8\prod\frac{x}{y+z}\le 1\Leftrightarrow\prod(x+y)\ge 8\prod x$$

Ultima inegalitate se obține din aplicarea inegalității mediilor MA-MG, mai exact avem $x+y\ge 2\sqrt{xy},y+z\ge 2\sqrt{yz},z+x\ge 2\sqrt{zx}$ și înmulțind aceste inegalități obținem $\prod(x+y)\ge 8\prod x$.

2. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}\sum\frac{a^2}{bc}\ge 2-\frac{r}{R}$$

I.V. Maftei și P.G. Popescu, La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola

Soluție. Avem $\frac{1}{2}\sum\frac{a^2}{bc}\ge 2-\frac{r}{R}\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{bc}+\frac{2r}{R}\ge 4$. Ultima inegalitate se scrie succesiv

$$\sum \frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}}{\frac{\prod (x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}} \geq 4 \Leftrightarrow \sum \frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{8\prod x}{\prod (x+y)} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum (y+z)^2}{\prod (x+y)} + \frac{8\prod x}{\prod (x+y)} \geq 4 \Leftrightarrow \sum (y+z)^2 + 8\prod x \geq 4\prod (x+y)$$

după care folosind identitățile $\sum (y+z)^3 = 2\sum x^3 + 3\sum xy(x+y)$ și $\prod (x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x$ ultima inegalitate se scrie echivalent

$$2\sum x^3 + 3\sum xy(x+y) + 8\prod x \geq 4\sum xy(x+y) + 8\prod x \Leftrightarrow 2\sum x^3 \geq \sum xy(x+y) \quad (1)$$

Arătăm că $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$. Avem $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 - y^2\right) \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$ ce evident are loc. Similar, $y^3 + z^3 \geq y^2z + yz^2$ și $x^3 + z^3 \geq x^2z + xz^2$, iar după suma acestor inegalități rezultă (1).

3. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$2\left(\sum r_a\right)\left(\sum \frac{r_a}{a}\right) \geq 9p$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Gazeta Matematică nr. 4, 2005

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$2\left(\sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x(y+z)}\right) \geq 9\sum x \Leftrightarrow 2\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)\left(\sum \frac{1}{x}\right)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) \geq 9\sum x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum xy\right)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \left(\sum xy\right)\left(\sum \frac{1}{xy}\right) \geq 9$$

unde am folosit identitățile $\left(\prod x\right)\left(\sum \frac{1}{x}\right) = \sum xy$ și $\sum x(y+z) = 2\sum xy$. Ultima inegalitate rezultă ușor aplicând inegalitatea mediilor MH-MA pentru numerele xy, yz, zx.

4. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{4r - R}{R} \leq \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$$

A. Roșianu,The American Mathematical Monthly, 2007

Soluție. Inegalitatea din dreapta se scrie $\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}$ care este tocmai inegalitatea mediilor MA-MG pentru numerele y și z. Inegalitatea din stânga o scriem succesiv

$$\frac{y+z}{2} \cdot \frac{4\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} - \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}}{\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}} \le \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \cdot \frac{16\prod x - \prod(x+y)}{\prod(x+y)} \le \sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow 16\prod x - \prod(x+y) \le 2(x+y)(x+z)\sqrt{yz} \Leftrightarrow 16\prod x \le (x+y)(x+z)\left(2\sqrt{yz}+y+z\right)$$

Folosind inegalitatea mediilor MA-MG, avem $y+z \ge 2\sqrt{yz}$ și analoagele.

Atunci

$$(x+y)(x+z)\left(2\sqrt{yz}+y+z\right) \ge 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 4\sqrt{yz} = 16\prod x$$

și soluția se încheie.

5. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum r_a l_a \le p^2$$

Viorel Gh. Vodă, Vraja geometriei demodate, pag. 215

Soluție. Pentru început să găsim o inegalitate în funcție de x, y și z pentru l_a. Avem

$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)} \le \sqrt{p(p-a)}$, unde am folosit inegalitatea mediilor MA-MG: $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \le 1$, deci $l_a \le \sqrt{x\sum x}$ și analog $l_b \le \sqrt{y\sum x}, l_c = \sqrt{z\sum x}$. Avem

$$\sum r_a l_a \le \sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x} \cdot \sqrt{x\sum x} = \left(\sum x\right)\left(\sum \sqrt{yz}\right) \le \left(\sum x\right)\left(\sum \frac{y+z}{2}\right) = \left(\sum x\right)^2 = p^2$$

unde am folosit inegalitatea mediilor MA-MG: $\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}$ și identitatea $\sum \frac{y+z}{2} = \sum x$.

6. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sqrt{p}\sum\sqrt{a} \le \sqrt{2}\sum r_a$$

George Tsintsifas, Crux Mathematicorum

Soluție. Trebuie să demonstrăm inegalitatea

$$\sum x^2(x+y)(x+z) \geq \frac{\left(\sum x\right)\left(\prod (x+y)\right)}{2}$$

echivalentă cu

$$\left(\prod (x+y)\right)\cdot \sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{\left(\sum x\right)\left(\prod (x+y)\right)}{2}$$

care devine

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{\sum x}{2}.$$

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, obținem

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum (y+z)} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum x} \geq \frac{\sum x}{2}$$

și soluția se încheie.

8. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{\prod a}{r} \geq \sum \frac{a^3}{r_a}$$

Ho Quang Vinh, The Mathscope

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie

$$\frac{\prod (y+z)}{\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}} \geq \sum \frac{(y+z)^3}{\frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}} \Leftrightarrow \left(\sum x\right)\left(\prod (y+z)\right) \geq \sum x(y+z)^3$$

În continuare folosind identitățile

$$\prod (x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x \text{ și } \sum x(y+z)^3 = \sum xy^3 + 3\sum xy^2 z + 3\sum xyz^2 + \sum xz^3$$

ultima inegalitate se scrie

$$\left(\sum x\right)\left(\sum xy(x+y) + 2\prod x\right) \geq \sum xy^3 + 3\sum xy^2 z + 3\sum xyz^2 + \sum xz^3$$

care după efectuarea calculelor și reducerea termenilor asemenea se transformă în

$$\sum x^2 y^2 \geq \left(\prod x\right)\left(\sum x\right).$$

Folosind inegalitatea cunoscută $\sum \alpha^2 \geq \sum \alpha\beta$, obținem

$$\sum x^2y^2 \geq \sum xyyz = \left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$

și soluția se încheie.

9. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile

$$9r(4R+r) \leq 3p^2 \leq (4R+r)^2$$

G. Colombier și T. Doucet, 1872, [3], pag. 103

Soluție. Să demonstrăm inegalitatea din dreapta. După înlocuiri și flosirea identității

$$\prod(x+y)+\prod x = \left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)$$

avem

$$3\left(\sum x\right)^2 \leq \left(4\cdot\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}+\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}\right)^2 \Leftrightarrow 3\left(\sum x\right)^2 \leq \frac{\left(\prod(x+y)+\prod x\right)^2}{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sum x\right)\left(\prod x\right) \leq \left(\sum xy\right)^2$$

Folosind inegalitatea cunoscută $\left(\sum \alpha\right)^2 \geq 3\sum \alpha\beta$, obținem

$$\left(\sum xy\right)^2 \geq 3\sum xyyz = 3\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$

ce încheie soluția.

Inegalitatea din stânga se reduce la $\left(\sum x\right)^2 \geq 3\sum xy$. Într-adevăr, avem succesiv

$$9\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}\cdot\left(4\cdot\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)}}+\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}\right) \leq 3\left(\sum x\right)^2 \Leftrightarrow 9\cdot\frac{\prod(x+y)+\prod x}{\sum x} \leq 3\left(\sum x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{\sum x} \leq \left(\sum x\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^2 \geq 3\sum xy$$

și soluția se încheie.

10. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum a^4 - \sum a^3(b+c) + \sum a^2bc \geq 0$$

Problemă propusă în [1]

Soluție. Folosind identitatea $\sum a^2bc = \left(\prod a\right)\left(\sum a\right)$ inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\sum (y+z)^4 - \sum (y+z)^3(y+z+2x) + 2\left(\prod (x+y)\right)\left(\sum x\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum (y+z)^4 - \sum (y+z)^4 - 2\sum x(y+z)^3 + 2\left(\prod (x+y)\right)\left(\sum x\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\prod (x+y)\right)\left(\sum x\right) \geq \sum x(y+z)^3.$$

Folosind identitățile

$$\sum x(y+z)^3 = \sum x\left(y^3+z^3\right) + 6\left(\prod x\right)\left(\sum x\right) \text{ și } \prod (x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x$$

ultima inegalitate se scrie echivalent

$$\left(\sum xy(x+y) + 2\prod x\right)\left(\sum x\right) \geq \sum x\left(y^3+z^3\right) + 6\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sum x\right)\left(\sum xy(x+y)\right) \geq \sum x\left(y^3+z^3\right) + 4\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$

În continuare, utilizând identitatea

$$\left(\sum x\right)\left(\sum xy(x+y)\right) = \sum x\left(y^3+z^3\right) + 2\sum x^2y^2 + 2\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$

ultima inegalitate se scrie echivalent

$$2\sum x^2y^2 + 2\left(\prod x\right)\left(\sum x\right) \geq 4\left(\prod x\right)\left(\sum x\right) \Leftrightarrow \sum (xy)^2 \geq \left(\prod x\right)\left(\sum x\right).$$

Avem

$$\sum (xy)^2 \geq \sum xyyz = \left(\prod x\right)\left(\sum x\right)$$

ce încheie soluția.

11. Demonstrați că în orice triunghi ΔABC, are loc inegalitatea

$$tg\frac{A}{2} + ctg\frac{A}{2} \geq 4\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

Călin Popa, [4]**, pag. 89**

Soluție. Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\sqrt{\frac{yz}{x\sum x}}+\sqrt{\frac{x\sum x}{yz}}\geq 4\sqrt{\frac{x}{\sum x}}\Leftrightarrow \frac{yz+x\sum x}{\sqrt{\left(\prod x\right)\left(\sum x\right)}}\geq 4\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sum x}}$$

$$\Leftrightarrow yz+x\sum x\geq 4\sqrt{x\prod x}\Leftrightarrow yz+x^2+xy+xz\geq 4x\sqrt{yz}$$

Folosind inegalitatea mediilor MA-MG obținem

$$yz+x^2+xy+xz\geq 4\sqrt[4]{yzx^2xyxz}=4x\sqrt{yz}$$

ce încheie soluția.

12. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\prod II_a\leq 8R^3$$

Art of Problem Solving, Geometric Inequalities Marathon

Soluție. Folosind egalitatea $II_a=4R\sin\frac{A}{2}$ și analoagele, obținem

$$\prod II_a\leq 8R^3\Leftrightarrow 64R^3\prod\sin\frac{A}{2}\leq 8R^3\Leftrightarrow\prod\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{8}$$

Inegalitatea cunoscută $\prod\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{8}$ se demonstrează ușor folosind substituțiile Ravi. După înlocuiri aceasta se scrie

$$\prod\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow 8\prod x\leq\prod(x+y)$$

Folosind inegalitatea mediilor obținem $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ și alte două inegalități similare. Înmulțind aceste trei inegaliăți rezultă $\prod(x+y)\geq 8\prod x$.

Bibliografie:

[1] **Mircea Lascu, *Inegalități geometrice demonstrate prin dualitate*, Gazeta matematică nr. 4, 1989.**

[2] **Mircea Ganga, *Teme și probleme de matematică*, Editura Tehnică, București, 1991.**

[3] **Viorel Gh. Vodă, *Vraja geometriei demodate*, Editura Albatros, București, 1983.**

[4] **Titu Andreescu, Marius Ghergu, Dinu Șerbănescu, Ion Șerdean, *Olimpiadele de matematică 2003, clasele IX-X*, Editura Gil, Zalău, 2003.**

2.CONCURSUL DE MATEMATICĂ SCLIPIREA MINŢII, 3.11.2012

Prezentare de :

NECULAI STANCIU, Buzău şi TITU ZVONARU, Comăneşti

- Gimnaziu -

Clasa a V-a

1. a) Aflaţi numerele de trei cifre care împărţite la răsturnatele lor dau câtul 5 şi restul un număr prim.

Titu Zvonaru, Comăneşti

b) Ce număr împărţit prin zecimea lui dă ca rezultat exact zece?

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie :

a) Fie $\overline{abc}$ numerele căutate şi r - restul. Din $\overline{abc} = 5 \cdot \overline{cba} + r$ rezultă uşor $c = 1$ şi atunci avem:

$100a + 10b + 1 = 500 + 50b + 5a + r \Leftrightarrow 95a = 499 + 40b + r$.

- dacă $a \leq 5$, atunci $95a \leq 475$ şi nu obţinem soluţii;
- dacă $a = 6$, atunci $71 = 40b + r$ şi obţinem soluţiile $b = 0, r = 71$ şi $b = 1, r = 31$;
- dacă $a = 7$, atunci $166 = 40b + r$, cum r este prim, ar trebui ca $r = 2$ şi nu obţinem soluţii;
- dacă $a = 8$, atunci $261 = 40b + r$ şi obţinem soluţiile $b = 4, r = 101$ şi $b = 5, r = 61$ (pentru $b \leq 3$ obţinem $r \geq 141$, dar ar trebui să avem $r < \overline{cba} \leq \overline{13a} < 140$);
- dacă $a = 9$, atunci $356 = 40b + r$ şi nu obţinem soluţii.

Numerele căutate sunt <u>601</u> $(601 = 106 \cdot 5 + 71)$, <u>611</u> $(611 = 116 \cdot 5 + 31)$, <u>841</u> $(841 = 148 \cdot 5 + 101)$ şi <u>851</u> $(851 = 158 \cdot 5 + 61)$.

b) V-aţi gândit imediat, probabil, la numărul 100. Nu-i greşit, dar e mult prea complicat, deoarece toate numerele sunt în aceeaşi situaţie! Orice număr împărţit la zecimea lui, dă ca rezultat zece.

2. a) Aflaţi x din egalitatea: 2013 – (2011 + x : 2012) + 2014 = 2010

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Pe o tabla sunt scrise numerele $1, 2, 3, ..., 2018$. Pentru inceput se sterg oricare doua dintre ele si se inlocuiesc cu suma lor. Apoi, se continua aceasta operatie pana mai raman pe tabla doua numere. Este posibil ca ultimile doua numere ramase sa fie ambele patrate perfecte? Justificati (folosind faptul că orice pătrat perfect este de forma 4k sau 4k + 1, unde k este număr natural)!

Florin Stănescu, Găeşti

Solutie :

a) 2011 + x : 2012 = 2017; x : 2012 = 6; x = 12072.

b) Presupunem ca ultimele doua numere ramase sunt patrate perfecte.Astfel, primul numar ramas il notam cu a^2, iar pe al doilea cu b^2. Din enuntul problemei este evident ca $a^2 + b^2 = 1 + 2 + 3 + ... + 2018 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1009 \cdot 2019 = 2037171 = M_4 + 3$. Un patrat perfect poate avea urmatoarea forma, $a^2 \in \{M_4, M_4 + 1\}$, deci $a^2 + b^2 \in \{M_4, M_4 + 1, M_4 + 2\} \Rightarrow a^2 + b^2 \neq M_4 + 3$. Astfel, ultimele doua numere ramase nu pot fi patrate perfecte

3. a) Există o cifră care are o proprietate ciudată. Astfel, dacă din această cifră se scade 3, iar ceea ce rămâne se împarte la 2, rezultatul va fi tot o cifră. Până aici nu este nimic neobişnuit. Dar iată că dacă din cifra ciudată scădem 2, iar numărul obţinut se împarte de data aceasta cu 3, rezultatul va fi acelaşi, ca în primul caz. Care este cifra ciudată?

RMT, NR.3 /2012, Neculai Stanciu, Buzău

b) Determinaţi cel mai mic număr de două cifre, ştiind că dacă-l adunăm cu răsturnatul său se obţine un număr de trei cifre divizibil cu 5.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie :

a) Se rezolvă ecuația $\frac{n-3}{2} = \frac{n-2}{3}$ și obținem cifra 5. Se mai poate proceda prin încercări.

b) Fie $\overline{ab}$ numărul pe care trebuie să-l determinăm; astfel, avem : $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{xyz}$, unde $\overline{xyz}$ este numărul de trei cifre divizibil cu 5. Egalitatea se scrie astfel : $10a + b + 10b + a = \overline{xyz}$, adică, $11a + 11b = \overline{xyz}$ sau $11(a + b) = \overline{xyz}$ (1); deducem că suma $a + b$ este un număr divizibil cu 5 ; obţinem cazurile :

I) $a + b = 5$

II) $a + b = 10$

III) $a + b = 15$.

În cazul I), verificăm dacă este verificată relaţia (1): $11\cdot 5=\overline{xyz}$, adică $55=\overline{xyz}$ (fals).

În cazul II), verificăm dacă este verificată relaţia (1): $11\cdot 10=\overline{xyz}$, deci $110=\overline{xyz}$ (adevărat).

În cazul III), verificăm dacă este verificată relaţia (1): $11\cdot 15=\overline{xyz}$, de unde, $165=\overline{xyz}$ (adevărat).

Pentru ca numărul $\overline{ab}$ să fie cel mai mic, vom prelucra cazul II): din $a+b=10$, vom obţine numărul $\overline{ab}$, cel mai mic, luând $a=1$ şi $b=9$, adică $\overline{ab}=19$.

În cazul III), cel mai mic număr $\overline{ab}$, este 69, care este mai mare decât 19.

Deci, cel mai mic număr, care îndeplineşte cerinţele problemei, este 19

Clasa aVI-a

1. a) Aflaţi numerele de două cifre care împărţite la răstunatele lor dau câtul şi restul numere prime.

Titu Zvonaru, Comăneşti

b) Fie x, y, z numere naturale diferite de zero. Arătaţi că dacă 5 divide 3x + 2y + z atunci 5 divide şi 8x + 12y + 16z.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Soluţie :

a) Fie $\overline{ab}$ numerele căutate, c - câtul şi r -restul.Avem $\overline{ab}=\overline{ba}\cdot c+r$, de unde deducem imediat $c<10$, şi cum c este prim avem posibilităţile:

i) $c=7; 10a+b=70b+7a+r \Leftrightarrow 3a=69b+r$. Deoarece $3a\le 27$, $b\ne 0$, nu găsim soluţii;

ii) $c=5; 10a+b=5ab+5a+r \Leftrightarrow 5a=49b+r$. Deoarece $5a\le 45$, $b\ne 0$, nugăsim soluţii;

iii) $c=3; 10a+b=30b+3a+r \Leftrightarrow 7a=29b+r$.

- dacă $b\ge 3$, atunci $29b\ge 87$ şi cum $7a\le 63$ nu obţinem soluţii;
- dacă $b=1$, atunci $7a=29+r$; deoarece $r<\overline{ba}$ şi $29+r$ trebuie să fie multiplu de 7, singura valoare convenabilă pentru r este $r=13$ şi atunci $a=6$;
- dacă $b=2$, atunci $7a=58+r$ şi rezultă uşor $r=5$ şi $a=9$.

Avem soluţiile <u>61</u> $(61=16\cdot 3+13)$ şi <u>92</u> $(92=29\cdot 3+5)$.

iv) $c=2; 10a+b=20b+2a+r \Leftrightarrow 8a=19b+r$.

- dacă $b\ge 4$, atunci $19b\ge 76$ şi cum $8a\le 72$ nu obţinem soluţii;
- dacă $b=1$, atunci din $8a=19+r$ rezultă $r=5, a=3$ şi $r=13, a=4$ (reamintim că $r<\overline{ba}\le 19$);
- dacă $b=2$, atunci din $8a=38+r$ rezultă $r=2, a=5$;
- dacă $b=3$, atunci din $8a=57+r$ rezultă $r=7, a=8$.

Avem soluţiile:
<u>31</u> $(31=13\cdot 2+5)$, <u>41</u> $(41=14\cdot 2+13)$, <u>52</u> $(52=25\cdot 2+2)$ şi <u>83</u> $(83=38\cdot 2+7)$.

b) 8x + 12y + 16z = 3x + 2y + z + 5(x + 2y + 3z) este divizibil cu 5

2. Fie numerele raţionale x, y, z, astfel încât să aibă loc egalitatea :

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=1.$$

a) Arătaţi că $xyz \neq 0$

b) Arătaţi că :

$$\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=2$$

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie :

a) Pentru ca egalitatea să aiba loc, trebuie să avem îndeplinite următoarele condiţii de existenţă :

$$\begin{cases} x+y\neq 0 \\ y+z\neq 0 \\ z+x\neq 0 \end{cases}$$

Pentru ca $xyz \neq 0$, trebuie ca, nici x, nici y, nici z, să nu fie numere egale cu zero.

Presupunem că $x=0$; egalitatea devine :

$$\frac{0}{0+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+0}=1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+z}+\frac{z}{z}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y+z}+1=1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+z}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y+z\neq 0 \end{cases};$$

dar dacă $y=0$, obtinem $x+y=0$,

ceea ce contrazice una dintre condiţiile de existenţă a egalităţii; aşadar, presupunerea că $x=0$ nu poate avea loc. Analog, arătăm că, nici y, nici z, nu pot fi numere egale cu zero.

b) Din $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=1$, obţinem $\frac{x+y-y}{x+y}+\frac{y+z-z}{y+z}+\frac{z+x-x}{z+x}=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{y}{x+y}+1-\frac{z}{y+z}+1-\frac{x}{z+x}=1 \Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=2.$$

3. Fie punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1$cm, $A_2A_3 = 2$cm, $A_3A_4 = 3$cm, ... , $A_{99}A_{100} = 99$cm. Aflaţi lungimea segmentului $A_{30}A_{54}$.

Adrian Stan, Buzău

Soluţie: $A_{30}A_{54} = A_{30}A_{31} + A_{31}A_{32} + ... + A_{53}A_{54} = 30 + 31 + ... + 53 = \frac{(30+53)\cdot 24}{2} = 996$.

Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că numărul y = (- 1)$^{1/x}$, unde x = $(1-\frac{1}{2})\ (1-\frac{1}{3})\ \ (1-\frac{1}{4}) \dots (1-\frac{1}{2012})$ este natural .

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Calculati suma elementelor multimi: $A = \left\{\overline{abc} \mid \frac{\overline{abc}+\overline{bc}+a}{\overline{acb}+\overline{cb}+a} = \frac{\overline{bca}+\overline{ca}+b}{\overline{bac}+\overline{ac}+b} = \frac{\overline{cab}+\overline{ab}+c}{\overline{cba}+\overline{ba}+c}\right\}$.

Florin Stănescu, Găeşti

Solutie :

a) x = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2012}$; x = $\frac{1}{2012}$ deci y = (- 1)$^{1/x}$ = 1 .

b) Avem:

$$\frac{\overline{abc}+\overline{bc}+a}{\overline{acb}+\overline{cb}+a} = \frac{\overline{bca}+\overline{ca}+b}{\overline{bac}+\overline{ac}+b} = \frac{\overline{cab}+\overline{ab}+c}{\overline{cba}+\overline{ba}+c} = \frac{\overline{abc}+\overline{bc}+a+\overline{bca}+\overline{ca}+b+\overline{cab}+\overline{ab}+c}{\overline{acb}+\overline{cb}+a+\overline{bac}+\overline{ac}+b+\overline{cba}+\overline{ba}+c} = \frac{123\,(a+b+c)}{123\,(a+b+c)} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\overline{abc}+\overline{bc}+a}{\overline{acb}+\overline{cb}+a} = 1 \Rightarrow \overline{abc} + \overline{bc} + a = \overline{acb} + \overline{cb} + a \Rightarrow 100a + 10b + c + 10b + c + a =$$
$$100a + 10c + b + 10c + b + a \Rightarrow 18b = 18c \Rightarrow b = c$$

Analog, din $\frac{\overline{bca}+\overline{ca}+b}{\overline{bac}+\overline{ac}+b} = 1 \Rightarrow a = c \Rightarrow a = b = c \Rightarrow A = \{111,222,333,\dots,999\}$.
Suma elementelor multimii A este: $111 + 222 + 333 + \cdots + 999 = 4995$.

2. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$, şi numărul $n = \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{4}$.

a) Arătaţi că $n = \frac{a(a+3)}{2}\cdot\left[\frac{a(a+3)}{2}+1\right]$

b) Arătaţi că n poate fi scris ca produs de două numere intregi consecutive.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie :

a) Numărul n poate fi scris astfel : $n=\frac{a(a+3)}{2}\cdot\frac{(a+1)(a+2)}{2}=\frac{a(a+3)}{2}\cdot\frac{a^2+3a+2}{2}=$

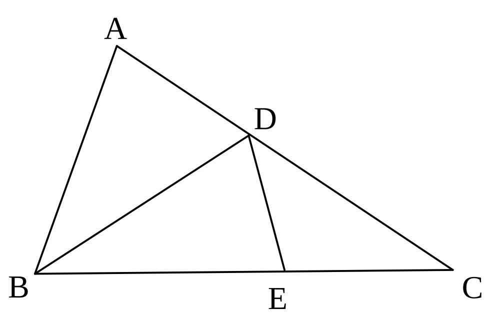
$$=\frac{a(a+3)}{2}\cdot\left[\frac{a(a+3)}{2}+1\right],$$

b) din a) rezultă că n este un produs de două numere întregi consecutive, deoarece, $\frac{a(a+3)}{2}$ este număr întreg, şi dacă a este număr par, şi dacă a este număr impar.

3. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, în care bisectoarea (BD) este cât (DC) și $BA+AD=BC$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluție :



Fie E pe (AC), astfel încât, $BE=BA$; $\Rightarrow$ $\Rightarrow EC=AD$. In plus, din $\Delta\ ABD\equiv\Delta\ EBD$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow (AD)\equiv(ED)$ și, deci, $\Delta\ DEC$ este isoscel, cu vârful E; $\Rightarrow \widehat{EDC}\equiv\widehat{ECD}$.

Dacă notăm $m(\widehat{EDC})=m(\widehat{ECD})=a$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{BED})=2a$, căci $\widehat{BED}$ este un unghi exterior triunghiului DEC, deci $m(\widehat{BAD})=2a$.

În plus, din faptul că $(BD)\equiv(DC)$, $\Rightarrow m(\widehat{DBC})=m(\widehat{DCB})=m(\widehat{DBA})=a$.

Aşadar, în triunghiul ABC, suma măsurilor unghiurilor este : $2a+2a+a=180^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5a=180^0 \Leftrightarrow a=36^0. \Rightarrow \begin{cases} m(\hat{A})=m(\hat{B})=72^0 \\ m(\hat{C})=36^0 \end{cases}$$

Clasa a VIII-a

1. a) Rezolvaţi ecuaţia $\frac{|x-5|}{|x-4|+|x+3|}=\frac{2}{7}$, pentru x $\in$ [-3;4]

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Arătaţi că dacă $a, b \in R_+^*$, atunci: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie :

a) Dacă x $\in$ [-3;4] avem x – 4 < 0 şi x + 3 > 0, deci $|x-4|+|x+3|$ = - x + 4 + x + 3 =7, aşadar $|x-5|$=2, de unde x = 7 $\notin$[-3;4] şi x = 3 $\in$ [-3;4].

b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, ceea ce este evident adevărat.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b$.

2. a) Arătaţi că oricare ar fi numerele strict pozitive a şi b avem:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2}$$

b) Determinaţi numerele reale pozitive a şi b, ştiind că :

$$\begin{cases} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2} = 192\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluție :

a) Vom arăta că $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2}$ (1) ; egalitatea se scrie, echivalent :

$$ab = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab = ab.$$

b) Ținând seamă de (1), prima egalitate din enunțul sistemului, devine :

$\left(\sqrt{ab}\right)^3 = 193\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^3 = \left(4\sqrt{3}\right)^3$, de unde, $\sqrt{ab} = 4\sqrt{3}$, deci, ab = 48 (2)

Din a doua egalitate din enunțul problemei, deducem :

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 100 \ (3)$$

Din (2) și (3), obtinem sistemul :

$$\begin{cases} ab = 48 \\ a^2+b^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 96 \\ a^2+b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow a^2+2ab+b^2 = 196 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 196 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a+b = 14$; așadar, avem :

$$\begin{cases} ab = 48 \\ a+b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 48 \\ a = 14-b \end{cases} \Rightarrow (14-b)b = 48 \Leftrightarrow 14b-b^2 = 48 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b^2-8b-6b+48 = 0 \Leftrightarrow (b-8)(b-6) = 0$, adică, b = 8 sau b = 6.

Dacă b = 8, rezultă a = 6, deci, numerele pe care trebuie să le determinăm sunt 6 și 8.
Dacă b = 6, rezultă a = 8, deci, numerele pe care trebuie să le determinăm sunt 8 și 6.

3. În parelelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele E şi F pe dreptele AA', respectiv, DD'. Determinaţi intersecţia planelor (EFB) şi (ABC), în cazurile:

a) $E \in (AA'$ şi $F \in (DD'$;

b) $E \in (AA'$ şi $F \notin [DD'$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie :

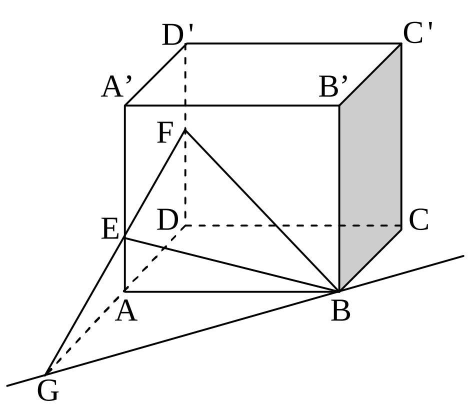


fig. 1

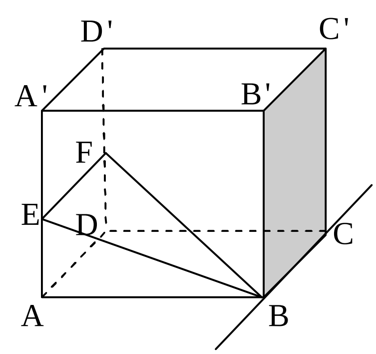


fig. 2

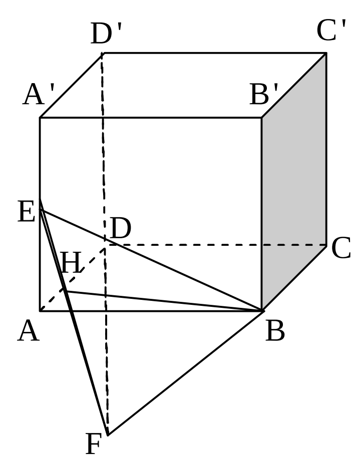


fig. 3

a) Vom deosebi subcazurile:

I) Dreptele EF şi AD nu sunt paralele; ele au, deci, un punct de intersecţie, fie acesta, G ; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta GB (fig. 1)

II) Dreptele EF şi AD sunt paralele; rezultă, deci, că şi dreptele EF şi BC sunt paralele; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta BC.

b) În acest caz, dreapta EF intersectează segmentul (AD) într-un punct, fie acesta, H ; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta HB.

3.Rafinări ale problemei L:256 din Sclipirea Minţii, Nr. X - 2012

de NELA CICEU, Roşiori, Bacău, NECULAI STANCIU, Buzău şi TITU ZVONARU, Comăneşti

Problema **L:256** , propusă de ***Costică Ambrinoc***, în revista **Sclipirea Minţii**, **Nr. X – 2012** are enunţul:

''Să se arate, fără a folosi calculatorul sau tabele trigonometrice, că :
$0{,}7 < \sin 50^0 < 0{,}77$ ''.

În cele ce urmează vom demonstra:

O rafinare a problemei L:256. :

$$\sin 50^0 > 0{,}75 .$$

Demonstraţie: Deoarece funcţia sinus este crescătoare în primul cadran şi

$$50^0 > \frac{99^0}{2},$$

este suficient să demonstrăm că:

$$\sin^2 \frac{99^0}{2} > \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 99^0}{2} > \frac{9}{16} \Leftrightarrow 1+\sin 9^0 > \frac{9}{8} \Leftrightarrow \sin 9^0 > \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 9^0 > \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 18^0}{2} > \frac{1}{64} \Leftrightarrow \cos 18^0 < \frac{31}{32} \Leftrightarrow \cos^2 18^0 < \frac{961}{1024}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 36^0}{2} < \frac{961}{1024} \Leftrightarrow \cos 36^0 < \frac{449}{512}.$$

Ştim că:

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

şi atunci avem de arătat că:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{449}{512} \Leftrightarrow \sqrt{5} < \frac{321}{128}.$$

Folosind faptul că:

$$\sqrt{5} < \frac{9}{4},$$

ne rămâne de arătat că :

$$\frac{9}{4} < \frac{321}{128} \Leftrightarrow 3 < \frac{107}{32},$$

care este adevărată şi rafinarea este demonstrată.

În continuare, vom demonstra:

Altă rafinare a problemei L:256. :

$$0{,}76 < \sin 50^0 < 0{,}77.$$

Demonstraţie: Să observăm mai întâi că, deoarece funcţia sinus este crescătoare în primul cadran, avem:

$$30^0 < 50^0 < 90^0 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 50^0 < 1.$$

Folosind formula:

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x),$$

obţinem:

$$\frac{1}{2} = \sin 150^0 = \sin 50^0(3 - 4\sin^2 50^0),$$

adică $\sin 50^0$ este rădăcina ecuaţiei:

$$(*)\ 8t^3 - 6t + 1 = 0.$$

Dacă notăm:

$$f(t) = 8t^3 - 6t + 1,$$

atunci

$$f(-1) = 1,\ f(0) = 1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1,\ f(1) = 3,$$

şi deci cele trei rădăcini ale ecuaţiei (*) aparţin intervalelor:

$$(-1,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right).$$

Cu schema lui Horner obţinem că:

$$f(0{,}76) = -0{,}048192,\ \text{şi}\ \ f(0{,}77) = 0{,}032264,$$

de unde rezultă că:

$$0{,}76 < \sin 50^0 < 0{,}77,$$

deci şi această rafinare este demonstrată.

Observaţie. Folosind acelaşi raţionament putem demonstra că:

$$0,17 < \sin 10^0 < 0,18.$$

4.Trei soluţii pentru problema O.VII.316 din RMT, Nr. 4/2012

de NECULAI STANCIU, Buzău şi NELA CICEU, Roşiori, Bacău

Problema O.VII.316 din RMT, Nr. 4/2012 are următorul enunţ:

’’Se dă un pătrat $ABCD$ şi două semidrepte cu originile în A şi B care traversează pătratul şi se intersectează în punctul E. Dacă $m(\angle BAE) = m(\angle ABE) = 75^0$, atunci demonstraţi că triunghiul CDE este echilateral.’’

Vasile Peiţa, Curtici

Să calculăm mai întâi $tg45^0$.

Avem:

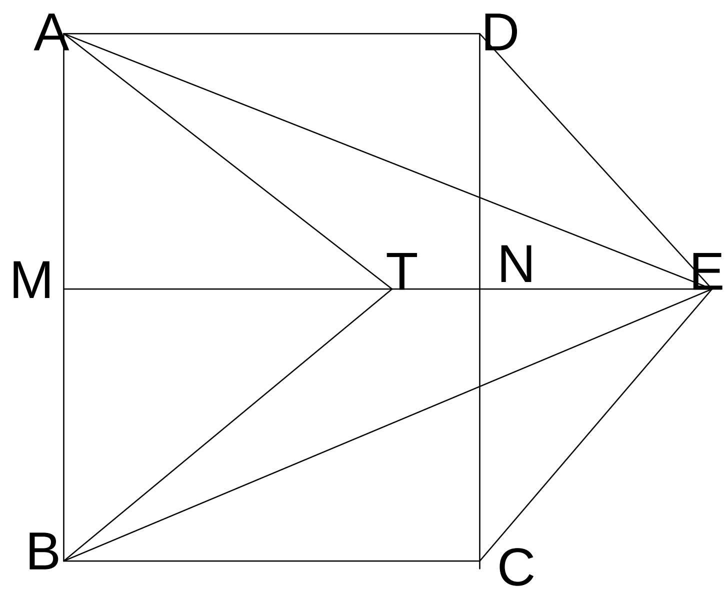
$$tg15^0 = \sqrt{\frac{\sin^2 15^0}{\cos^2 15^0}} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^0}{1+\cos 30^0}} = \sqrt{\frac{(1-\cos 30^0)^2}{1-\cos^2 30^0}} = \frac{1-\cos 30^0}{\sin 30^0},$$

deci:

$$tg15^0 = 2-\sqrt{3}.$$

Vom considera, fără a afecta generalitatea, că latura pătratului este egală cu unitatea.

Fie M mijlocul lui AB şi N mijlocul lui CD.



Soluţia 1.

Din triunghiul dreptunghic AME cu $m(\angle AEM) = 15^0$ obţinem:

$$AE = \frac{1}{2\sin 15^0}.$$

Aplicând teorema cosinusului în ΔADE rezultă:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2\cdot AD\cdot AE\cdot\cos\angle DAE = 1 + \frac{1}{4\sin^2 15^0} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2\sin 15^0}\cdot\cos 15^0 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2(1-\cos 30^0)} - \frac{1}{tg15^0} = 1 + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 1,$$

deci ΔCDE este echilateral.

Soluţia 2.

În triunghiul dreptunghic AME obţinem:

$$tg15^0 = \frac{AM}{EM} \Rightarrow EM = \frac{1}{2tg15^0} = \frac{1}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2(4-3)} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

şi atunci:

$$NE = ME - MN = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔDEN rezultă :

$$DE^2 = DN^2 + NE^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

deci ΔDCE este echilateral.

Soluţia 3.

Construim triunghiul echilateral ABT, punctul T fiind situat între M şi N.
Deoarece $m(\angle TAD) = 15^0 = m(\angle AET)$, deducem că $AT = TE$.
Avem $TE \| AD$ şi $TE = AT = AD$, şi atunci patrulaterul $ATED$ este paralelogram. Rezultă că $DE = AT = AB$, deci ΔCDE este echilateral.

Observaţie. Soluţia 3 ne permite să calculăm $tg15^0$.
Avem:

$$AM = \frac{1}{2}, NE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

şi atunci:

$$tg15^0 = tg\angle AEM = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$