Revista Electronică MateInfo.ro

(revistă de matematică lunară)

MARTIE 2013

ISSN 2065 – 6432

MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro
dobre.andrei@yahoo.com

1. Other solutions for two problems of REOIM and La Gaceta de la RSME

by Titu Zvonaru, Comăneşti and Neculai Stanciu, Buzău

Problema 229 from REOIM, No. 47, Noviembre 2012 – Febrero 2013

Problema 229 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)

Sea ABC un triángulo y AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas concurrentes en un punto O interior al triángulo.

Sean

$$\begin{aligned}\alpha &= [AOC_1] - [COA_1],\\ \beta &= [BOA_1] - [AOB_1],\\ \gamma &= [COB_1] - [BOC_1].\end{aligned}$$

Probar que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $\alpha\beta\gamma = 0$.

Nota: $[PQR]$ es el área del triángulo PQR.

Our Solution:

We denote:

$$[AOC_1] = S_1, [COA_1] = S_2, [BOA_1] = S_3, [AOB_1] = S_4, [COB_1] = S_5, [BOC_1] = S_6,$$

and then:

$$\alpha = S_1 - S_2, \beta = S_3 - S_4, \gamma = S_5 - S_6.$$

Also we denote:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = x, \frac{CB_1}{B_1A} = y, \frac{AC_1}{C_1B} = z,$$

and then by the theorem of *Ceva* we deduce that:

$$xyz = 1.$$

Because the triangles AOC_1 and BOC_1 has the same high and $\frac{AC_1}{C_1B} = z$, we obtain that

$$S_1 = zS_6, \text{ and similar } S_3 = xS_2,\ S_5 = yS_4.$$

From the same reson we have $[ABA_1] = x \cdot [AA_1C]$, which is write:

$$S_1 + S_6 + S_3 = xS_4 + xS_5 + xS_2 \Leftrightarrow zS_6 + S_6 = xS_4 + xyS_4, \text{ i.e.}$$

$$S_4 = \frac{z+1}{x(y+1)} S_6 \qquad (1)$$

Analogous we obtain that:

$$[BCB_1] = y \cdot [BAB_1] \Leftrightarrow S_3 + S_2 + S_5 = yS_1 + yS_6 + yS_4 \Leftrightarrow xS_2 + S_2 = yzS_6 + yS_6,$$

i.e.

$$S_2 = \frac{y(z+1)}{x+1} S_6 \qquad (2)$$

If $\alpha+\beta+\gamma=0$, then by (1) and (2) we obtain successively that:

$$S_1+S_3+S_5=S_2+S_4+S_6 \Leftrightarrow zS_6+xS_2+yS_4=S_2+S_4+S_6$$

$$\Leftrightarrow (z-1)S_6+(x-1)S_2+(y-1)S_4=0$$

$$\Leftrightarrow z-1+\frac{(x-1)y(z+1)}{x+1}+\frac{(y-1)(z+1)}{x(y+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow x+x^2z+1+xz-x^2y-x^2-xy-x+xy+x^2y^2+x+x^2y-y-xy^2-1-xy+1+$$
$$+xy+yz+y-xz-x-z-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2z-x^2+x^2y^2-xy^2+yz-z=0$$

$$\Leftrightarrow x^2z-x^2+x^2y^2-1+1-z+yz-xy^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(z-1)+\frac{1-z^2}{z^2}+1-z+y\cdot\frac{z^2-1}{z}=0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)\left(x^2-\frac{1+z}{z^2}-1+y\cdot\frac{z+1}{z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(x^2-x^2y^2-xy-1+y+xy^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)[x^2-1-y(x-1)-xy^2(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-1)(z-1)(x+1-y-xy^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1)(xy+x+1)=0.$$

Therefore, if $\alpha+\beta+\gamma=0$, then at least one of numbers x,y,z are equal with 1. We assume that $x=1$. Then by (1) we obtain that:

$$S_5=yS_4=y\cdot\frac{z+1}{x(y+1)}\cdot S_6=\frac{yz+y}{y+1}\cdot S_6=\frac{1+y}{y+1}\cdot S_6=S_6,$$

where we use the fact that: $x=1 \Rightarrow yz=1$.

Hence,

$$\gamma=0 \text{ and } \alpha\beta\gamma=0,$$

and the proof is complete.

Problema 197, Vol. 16 (2013), No. 1, pp. 107-116

PROBLEMA 197. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2+b^2+c^2=3$. Demostrar que

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{a}{\sqrt{c^2+3}} \le \sqrt[4]{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}.$$

Our Solution:

By *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*' s inequality we have:

$$\left(b\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}+c\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+3}}+a\cdot\frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\right)^2\le$$
$$\le\left(b^2+c^2+a^2\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\right)^2\right]$$

and then is sufficient to show that:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\right)\le\sqrt{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\le\frac{a+b+c}{4\sqrt{abc}}.$$

Since:

$$a^2+3=a^2+1+1+1\ge4\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot1\cdot1\cdot1}=4\sqrt{a},$$

it remains to show that:

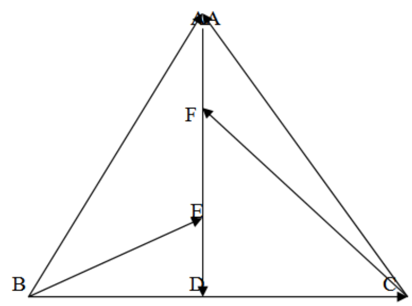
$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt{abc}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right]\ge0,\text{ which is true.}$$

We have equality if and only if $a=b=c=1$, and we are done.

2.Asupra unei probleme de matematica data la concursul interjudetean "Trident-Petru Morosan" 2009 Braila

Profesor Serban George-Florin
Liceul Tehnologic " Grigore Moisil " Braila

La clasa a 7-a a fost propusa urmatoarea problema de geometrie:
"Fie triunghiul ABC ascutitunghic si D Є BC piciorul inaltimii din A. Bisectoarele unghiurilor ∠ABC si ∠ ACB intersecteaza AD in E respectiv F, astfel incat BE=CF. Aratati ca triunghiul ABC este isoscel".
Voi prezenta in continuare 3 metode de rezolvare a acestei probleme.
Metoda 1
In ΔABD si ΔADC aplic formula bisectoarei.



BE=$\dfrac{2AB*BD*\cos\frac{B}{2}}{AB+BD}$ si CF=$\dfrac{2AC*DC*\cos\frac{C}{2}}{AC+DC}$ dar BE=CF .

ΔABD , BD=ABcosB , ΔADC , DC=ACcosC . Din T sinusurilor avem AB=2RsinC , AC=2RsinB. Inlocuiesc BD, DC, AB si AC in formulele lui BE si CF.

BE=$\dfrac{2*2R*\sin C*AB*\cos B*\cos\frac{B}{2}}{AB(1+\cos B)}=\dfrac{4R\sin C\cos B\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{2R\sin C\cos B}{\cos\frac{B}{2}}$

CF=$\dfrac{2*2R*\sin B*\cos C*\cos\frac{C}{2}}{AC(1+\cos C)}=\dfrac{4R\sin B\cos C\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{2R\sin B\cos C}{\cos\frac{C}{2}}$ .Dar BE=CF

$\frac{2R\sin C\cos B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin B\cos C}{\cos\frac{C}{2}}$ deci $\mathrm{tgB}\cos\frac{B}{2}=\mathrm{tgC}\cos\frac{C}{2}$.

Fie functia F:(0,Π/2)→R , F(X)= $\mathrm{tgX}\cos\frac{X}{2}$ .Derivata lui F este

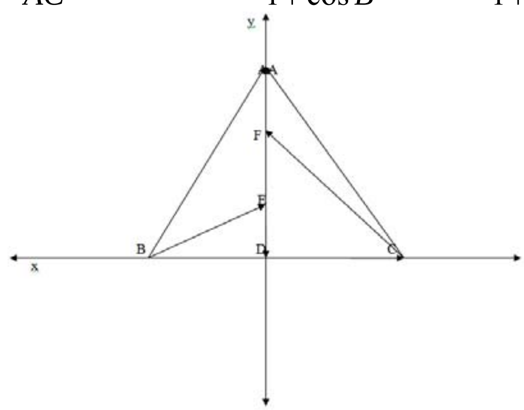
F'(X)=$\frac{2\cos\frac{X}{2}-\sin X\cos X\sin\frac{X}{2}}{2\cos X\cos X}$ >0 , numitorul este mai mare ca 0 , iar $2\cos\frac{X}{2}$-$\sin X\cos X\sin\frac{X}{2}$>0 implica $\sin X\cos X\mathrm{tg}\frac{X}{2}$<2 deoarece X€(0,Π/2) , X/2 € (0,Π/4) , 0< $\mathrm{tg}\frac{X}{2}$<1 deci $\sin X\cos X\mathrm{tg}\frac{X}{2}$<1<2 .Deci functia F este strict crescatoare pe (0,Π/2) deci este injectiva F(∠B)=F(∠C) rezulta ca m(∠B)=m(∠C) deci AB=AC.

Metoda 2.

In reperul cartezian xoy Fie punctele A(0,a) , D(0,0) , B(b,0) si C (c,0).

In ΔABD si ΔADC aplic teorema bisectoarei.

$\frac{DE}{AE}=\frac{BD}{AB}=\cos B$ si $\frac{DF}{AF}=\frac{CD}{AC}=\cos C$, E(0 ,$\frac{a\cos B}{1+\cos B}$) , F (0, $\frac{a\cos C}{1+\cos C}$)



BE^2=b^2+$\frac{a*a*\cos B*\cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)}$,CF^2=c^2+ $\frac{a*a*\cos C*\cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$ dar BE=CF

$$b^2+\frac{a*a*\cos B*\cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)}=c^2+\frac{a*a*\cos C*\cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$$ Impart prin a^2.

$$\frac{b*b}{a*a}+\frac{\cos B*\cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)}=\frac{c*c}{a*a}+\frac{\cos C*\cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$$

$$\mathrm{ctg}^2 B+\frac{\cos B*\cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)}=\mathrm{ctg}^2 C+\frac{\cos C*\cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$$

$$\cos^2 B\left(\frac{1}{\sin B\sin B}+\frac{1}{(1+\cos B)(1+\cos B)}\right)=\cos^2 C\left(\frac{1}{\sin C\sin C}+\frac{1}{(1+\cos C)(1+\cos C)}\right)$$

$$\frac{2\cos B\cos B(1+\cos B)}{\sin B\sin B(1+\cos B)(1+\cos B)}=\frac{2\cos C\cos C(1+\cos C)}{\sin C\sin C(1+\cos C)(1+\cos C)}$$

Rezulta ca $\dfrac{\cos B\cos B}{\sin B\sin B(1+\cos B)}=\dfrac{\cos C\cos C}{\sin C\sin C(1+\cos C)}$

Fie functia $F:(0,1)\to R$, $F(x)=\dfrac{X*X}{(1-X*X)(1+X)}$ .Derivata functiei F este

$F'(X)=\dfrac{X(1+X)(X*X-X+2)}{(1-X*X)(1-X*X)(1+X)(1+X)}>0$ pe $(0,1)$.Rezulta ca F este strict crescatoare pe $(0,1)$ deci F este injective F(cosB)=F(cosC) , B si C sunt unghiuri ascutite rezulta ca $m(\angle B)=m(\angle C)$ deci AB=AC avem ca ΔABC este isoscel .

Metoda 3 .

In ΔABD si ΔADC aplic teorema bisectoarei.

$$\frac{DE}{AE}=\frac{BD}{AB}=\cos B \quad \text{si} \quad \frac{DF}{AF}=\frac{CD}{AC}=\cos C$$

In ΔABD , $\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{BD}+(\cos B)\overrightarrow{BA}}{1+\cos B}$

In ΔACD, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{\overrightarrow{CD}+(\cos C)\overrightarrow{CA}}{1+\cos C}$

Dar $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CF}|$ Deci $|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{CF}^2|$

Dar $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$ si $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

Deci $\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{BD}+(\cos B)\overrightarrow{BD}+(\cos B)\overrightarrow{DA}}{1+\cos B}$

Analog se obtine

$$\overrightarrow{CF}=\frac{\overrightarrow{CD}+(\cos C)\overrightarrow{CD}+(\cos C)\overrightarrow{DA}}{1+\cos C}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \frac{(\cos C)\overrightarrow{DA}}{1+\cos C}$$

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B)\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DA}}{(1+\cos B)(1+\cos B)} + \frac{2(\cos(B))\overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{DA}}{1+\cos B}$$

Dar AD⊥BC deci $\overrightarrow{BD} * \overrightarrow{AD} = 0$

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B)\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DA}}{(1+\cos B)(1+\cos B)}$$. Analog se obtine

$$|\overrightarrow{CF}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 + \frac{(\cos C)(\cos C)\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DA}}{(1+\cos C)(1+\cos C)}.$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B)\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DA}}{(1+\cos B)(1+\cos B)} = |\overrightarrow{CD}|^2 + \frac{(\cos C)(\cos C)\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DA}}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$$

impart prin

$|\overrightarrow{DA}|^2$ si obtinem $\frac{BD * BD}{DA * DA} + \frac{\cos B * \cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)} = \frac{CD * CD}{DA * DA} + \frac{\cos C * \cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$

$$\mathrm{ctg}^2 B + \frac{\cos B * \cos B}{(1+\cos B)(1+\cos B)} = \mathrm{ctg}^2 C + \frac{\cos C * \cos C}{(1+\cos C)(1+\cos C)}$$

am obtinut aceiasi formula ca si in metoda 2 .(continuarea este in metoda 2).

Comentariu:

ΔABC fiind isoscel avem ca AD inaltime rezulta ca AD este bisectoare . Folosim faptul ca intr-un triunghi bisectoarele sun concurente . Avem ca AD∩BE∩CF={I} ,
I este centrul cercului inscris (punctul de intersectie al bisectoarelor ΔABC).
Rezulta ca I=E=F , deci punctele E si F coincid. Desi din enuntul problemei “. Bisectoarele unghiurilor ∠ABC si ∠ ACB intersecteaza AD in E respectiv F” se intelege ca punctele E si F sunt distincte.

Bibliografie: Subiect dat la concursul interjudetean
“Trident-Petru Morosan” 2009 Braila

3.Formula lui Cardan pentru rezolvarea ecuației de gradul 3

Profesor Rezmive Daniela Florina, gradul didactic 2
Liceul Tehnologic „Aurel Vlaicu „ Lugoj, jud. Timiş

Fie ecuația
$x^3 + px + q = 0$, ecuația de gradul 3 cu $p, q \in \mathbb{R}$. (1)

Notăm $x = u + v \Rightarrow x^3 = (u+v)^3 \Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \Rightarrow x^3 - u^3 - v^3 - 3uv\underbrace{(u+v)}_{x} = 0$

Avem că

$$x^3 - 3uvx - u^3 - v^3 = 0 \qquad (2)$$

Pentru $-3uv = p$ şi $u^3 + v^3 = -q$, ecuația (2) este echivalentă cu ecuația (1).

Pornind de la sistemul $\begin{cases} -3uv = p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$ obținem că $\begin{cases} uv = -\dfrac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$.

Notând $u^3 = X_1,\ v^3 = X_2$ şi folosind relațiile lui Viete obținem că X_1, X_2 sunt soluțiile ecuației

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \ (3)$$

Calculând $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$, ecuația (3) are soluțiile

$$X_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$X_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Din $u^3 = X_1$, rezultă că

$$u^3 = X_1 \Rightarrow u^3 = X_1(\cos 0 + i\sin 0) \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt[3]{X_1}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[3]{X_1}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{X_1}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{X_1}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_3 = \sqrt[3]{X_1}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{X_1}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Analog din $v^3 = X_2$, rezultă că

$$v^3 = X_2(\cos 0 + i\sin 0) \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt[3]{X_2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[3]{X_2}$$

$$v_2 = \sqrt[3]{X_2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{X_2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$v_3 = \sqrt[3]{X_2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{X_2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Tinând cont că rădăcinile ecuației (1) sunt de forma $x = u + v$, putem scrie soluțiile

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Se întâlnesc următoarele situații:

a) Dacă $\Delta > 0$ atunci $\sqrt[3]{X_1}$, $\sqrt[3]{X_2} \in \mathbb{R}$, deci $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ şi $x_1 = \overline{x_2}$

b) Dacă $\Delta = 0$ atunci $\sqrt[3]{X_1} = \sqrt[3]{X_2}$, deci $x_1 \in \mathbb{R}$, iar $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{X_1}$

c) Dacă $\Delta < 0$ atunci X_1, $X_2 \in \mathbb{C}$ şi $X_1 = \overline{X_2}$.

Fie $X_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0,2\pi) \Rightarrow X_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi)) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{X_1} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad \sqrt[3]{X_2} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}\right)\right)$$

Cum $\sqrt[3]{X_1}\cdot\sqrt[3]{X_2}=\sqrt[3]{r^2}=-\frac{p}{3}\Rightarrow\sqrt[3]{r}=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ $(p<0)$.

Obținem astfel

$$x_1=\sqrt[3]{X_1}+\sqrt[3]{X_2}=$$

$$=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt[3]{r}i\sin\frac{\varphi}{3}+\sqrt[3]{r}\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\right)+\sqrt[3]{r}i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt[3]{r}i\sin\frac{\varphi}{3}+\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt[3]{r}i\sin\frac{\varphi}{3}=$$

$$=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}\Rightarrow$$

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{2}}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2=\sqrt[3]{X_1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt[3]{X_2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\sqrt{-\frac{p}{2}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}$$

$$x_3=\sqrt[3]{X_1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)+\sqrt[3]{X_2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{-\frac{p}{2}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

Şi cele 3 soluții sunt reale.

Expresiile rădăcinilor x_1,x_2,x_3 pot fi exprimate printr-o singură formulă numită formula lui Cardan

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

<u>Exemple:</u>

<u>Exemplul 1)</u> $x^3-51x-104=0$.

Avem că $p=-51, q=-104$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$X^2-104X+17^3=0$$

$\Delta=104^2-4\cdot17^3=-4\cdot2209=-4\cdot47^2<0$

Soluțiile ecuației (3) vor fi $X_{1,2}=\dfrac{104\pm2\cdot47i}{2}=52\pm47i=(4\pm i)^3$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației inițiale vor fi $x=\sqrt[3]{X_1}+\sqrt[3]{X_2}$

$x_1 = (4+i) + (4-i) = 8$

$x_2 = (4+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + (4-i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -4 - \sqrt{3}$

$x_3 = (4+i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + (4-i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -4 + \sqrt{3}$

Exemplul 2: $x^3 - 21x - 20 = 0$

Avem că $p = -21, q = -20$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$X^2 - 20X + 343 = 0$$

$\Delta = -4 \cdot 3^5 < 0$

Soluțiile ecuației (3) vor fi $X_{1,2} = \frac{20 \pm 2\cdot 9\sqrt{3}i}{2} = 10 \pm 9\sqrt{3}i$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației inițiale vor fi $x = \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2}$

$x_1 = \sqrt[3]{10 + 9i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 9i\sqrt{3}}$

Scriem forma trigonometrică pentru $X_{1,2} \in \mathbb{C}$

$10 + 9i\sqrt{3} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ în care:

$r = |x_1| = \sqrt{343} = 7\sqrt{7}$, $\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{343}} = \frac{10}{7\sqrt{7}}$, $\sin\varphi = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{343}} = \frac{9\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Aşadar: $u = \sqrt[3]{10 + 9i\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7^3}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = \sqrt{7}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)$ şi

$v = \sqrt[3]{10 - 9i\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7^3}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = \sqrt{7}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) \quad k = 0,1,2$

Soluțiile ecuației date vor fi: $x_1 = 2\sqrt{7}\cos\frac{\varphi}{3}$, $x_2 = 2\sqrt{7}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}$, $x_3 = 2\sqrt{7}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}$.

Reducerea unei ecuații de gradul 3 la ecuația de tipul (3) Fie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Reducem termenul de grad doi prin schimbarea de variabilă $x \to y - \frac{b}{3a}$, ecuația aducându-se la forma

$$x^3 + px + q = 0\,.\ (1)$$

Exemplul 3: $x^3 + 9x^2 + 42x + 196 = 0$.

Facem schimbarea de variabilă $x \to y - 3$ şi obținem ecuația $y^3 + 15y + 124 = 0\,(*)$

Avem $p = 15$, $q = 124$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$Y^2 + 124Y - 125 = 0$$

$\Delta = 126^2 > 0$

Soluțiile ecuației (3) vor fi $Y_1 = 1,\ Y_2 = -125$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației (*) vor fi $y = \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}$

Deci

$y_1 = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-125} = 1 - 5 = -4$

$y_2 = 1\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) - 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 3i\sqrt{3}$

$y_2 = -5\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 3i\sqrt{3}$

Ținând cont de substituția făcută $x \to y - 3$, obținem soluțiile ecuației inițiale:

$x_1 = -7$, $x_2 = -1 + 3i\sqrt{3}$, $x_3 = -1 - 3i\sqrt{3}$.

Exemplul 4: $x^3 - x^2 + 1 = 0$

Facem schimbarea de variabilă $x \to y + \frac{1}{3}$ şi obținem ecuația $y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{25}{27} = 0$.

Avem $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{25}{27}$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$Y^2 + \frac{25}{27}Y + \frac{1}{27^2} = 0\,.$$

$\Delta = \frac{69}{81} > 0$. Deci $Y_{1,2} = \frac{-25 \pm 3\sqrt{69}}{54} = -\frac{25}{54} \pm \frac{\sqrt{69}}{18}$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației (*) vor fi $y = \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}$.

Rezultă $u=\sqrt[3]{-\frac{25}{54}+\frac{\sqrt{69}}{18}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{25}{54}-\frac{\sqrt{69}}{18}}$.

Soluțiile ecuației în necunoscuta y sunt

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{25}{54}+\frac{\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{-\frac{25}{54}-\frac{\sqrt{69}}{18}}$$

$$y_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{25}{54}+\frac{\sqrt{69}}{18}}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{25}{54}-\frac{\sqrt{69}}{18}}$$

$$y_3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{25}{54}+\frac{\sqrt{69}}{18}}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{25}{54}-\frac{\sqrt{69}}{18}}$$

Din $x\to y-3$, obținem soluțiile ecuației inițiale.

Bibliografie:

ROŞCULEȚ , M. --Analiză matematică , vol I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1964

4.Rezolvarea CONJECTURII lui D.H.LEHMER referitoare la ECUATIA k $\phi[N] == N - 1$

de NICODIM A. NEGREA
Liceul Teoretc Traian DEVA

*Mamei mele , **Elisabeta***

Reproducem urmatorul articol de pe INTERNET :
“ *Wolfram Library Archive*
MATHSOURCE
Title
Computational Evidence for Lehmer’s Totient Conjecture
Author
John Renze
Organization : *Wolfram Research , Inc.*
Department : *Information Reources*
Revision date
2004 – 11 – 23
Description

In 1932 , D.H.Lehmer considered the equation
$k[N] == N - 1$ **, for positive integers** N **and** k **.**
If N is $prime$, then the equqtion has asolution with $k = 1$.
He conjectured that these are the only solutions .
Conjecture : **Let a be a positive integer .**
Then $[N]$ $divides\ N - 1$ **if and only if** $N\ is\ prime$ **.**
The conjecture remains open to this day .
The current best result , due to Cohen and Hagis , is that N must have at least 14 prime factors and be greater than 10 ? 22 .
The code in this notebook carries out a search for a counter-example to Lehmer’s conjecture and extends these limits .
Subiect
▹ Mathematics > *Number Theory*
Downloads
Lehmer Article . nb (12,1 kB) –
Mathematica Notebook [for Mathematica 5.0] “
([4])

Au fost multe incercari de rezolvare ! (de exemplu : in [4] si [2]) .

“Solutionarea” mea publicata in [3] nu a fost unanim acceptata .
Incercam aici ,din nou, rezolvarea Conjecturii , inspirati de [3] .

* * *

In prima parte aflam multimea solutiilor unei ecuatii in numere intregi , care va fi esentiala in partea a doua pentru rezolvarea Conjecturii .
Notam pentru un numar intreg fix oarecare t , $t \geq 2$:

(1) $L_t = \{ (n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) :$ $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt numere intregi ,
$1 \leq n_0$, $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{t-1} \leq z_t$,
$n_0 \, (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1) = n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t - 1 \}$.

* * *

Pentru $t = 2$ si $(n_0, n_1, z_2) \in L_2$ obtinem :

$n_0(n_1 - 1)(z_2 - 1) = n_1 z_2 - 1$

$n_0(n_1 - 1)(z_2 - 1) - n_1(z_2 - 1) + n_1 - 1$, unde $z_2 - 1 \neq 0$

$\frac{n_1 - 1}{z_2 - 1} = n_0(n_1 - 1) - n_1$, unde $n_1 - 1$, $z_2 - 1$ si $n_0(n_1 - 1) + n_1 - 1$ sunt trei numere intregi , $n_1 - 1 > 0$, $z_2 - 1 > 0$, deci si $n_0(n_1 - 1) + n_1 - 1 > 0$

$z_2 - 1 \leq n_1 - 1$

$z_2 \leq n_1$.

Din (1) obtinem $n_1 \leq z_2$. Rezulta $z_2 = n_1$, apoi $1 = n_0(n_1 - 1) - n_1$, deci

$n_0(n_1 - 1) = n_1 + 1$, $n_0(n_1 - 1) = n_1 - 1 + 2$, $(n_0 - 1)(n_1 - 1) = 2$, unde

$n_0 - 1$ si $n_1 - 1$ sunt doua numere intregi , $n_1 - 1 \geq 1$

$n_0 - 1 = 1$, $n_1 - 1 = 2$ sau $n_0 - 1 = 2$, $n_1 - 1 = 1$

$n_0 = 2$, $n_1 = z_2 = 3$ sau $n_0 = 3$, $n_1 = z_2 = 2$

(2) Daca $t = 2$, $(n_0, n_1, z_2) \in L_2$, atunci : $z_2 = n_1$ si

$L_2 = \{ (2,3,3) , (3,2,2) \}$.

* * *

Pentru $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, $t \geq 3$, obtinem :

$n_0 \, (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1) = n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t - 1$

$n_0 \, (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1) = n_1 n_2 \dots n_{t-1}(z_t - 1) + n_1 n_2 \dots n_{t-1} - 1$,

unde $z_t - 1 \neq 0$

$\frac{n_1 n_2 \dots n_{t-1} - 1}{z_t - 1} = n_0 \, (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) - n_1 n_2 \dots n_{t-1}$,

unde $n_1 n_2 \dots n_{t-1} \quad 1$, $z_t \quad 1$, $n_0 \, (n_1 \quad 1)(n_2 \quad 1) \dots (n_{t-1} \quad 1)$ $n_1 n_2 \dots n_{t-1}$ sunt trei numere intregi , $n_1 n_2 \dots n_{t-1} - 1 > 0$, $z_t - 1 > 0$,deci

$n_0 \, (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) - n_1 n_2 \dots n_{t-1} > 0$

$z_t - 1 \leq n_1 n_2 \dots n_{t-1} - 1$

$z_t \le n_1 n_2 \dots n_{t-1}$.

(3) Daca $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, $t \ge 3$, atunci :

$z_t \le n_1 n_2 \dots n_{t-1}$,

$n_0\,(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) - n_1 n_2 \dots n_{t-1} > 0$,

$n_0\,(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) > n_1 n_2 \dots n_{t-1}$,

$n_0 > \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} > \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-2}}{n_{t-2}-1} > \dots > \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} > \frac{n_1}{n_1-1} > 1$

$n_0 > 1$

$n_0(n_1 - 1) > n_1$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) > n_1 n_2$

....

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-2} - 1) > n_1 n_2 \dots n_{t-2}$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) > n_1 n_2 \dots n_{t-1}$

$n_0 \ge 2$

$n_0(n_1 - 1) \ge n_1 + 1$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \ge n_1 n_2 + 1$

....

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-2} - 1) \ge n_1 n_2 \dots n_{t-2} + 1$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) \ge n_1 n_2 \dots n_{t-1} + 1$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1) = n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t - 1$

$n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1) < n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t$

$1 < \frac{n_1}{n_1-1} < \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} < \dots < \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} < n_0 < \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} \cdot \frac{z_t}{z_t-1}$.

(4) Daca $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_r, \dots) \in L_t$, $t \ge 3$, r este un numar intreg , $2 \le r \le t - 1$, pentru care este adevarata egalitatea :

$m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_r - 1) = m_1 m_2 \dots m_r + 1$,

atunci :

$m_r \le m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$.

Intr-adevar,

$m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_r - 1) = m_1 m_2 \dots m_{r-1}(m_r - 1) + m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$,

unde $m_r - 1 \ne 0$

$\frac{m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1}{m_r - 1} = m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1}$, unde $m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$, $m_r - 1$, $m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{r-1}-1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1}$ sunt trei numere intregi , $m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1 > 0$, $m_r - 1 > 0$, deci

$$m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{r-1}-1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1} > 0$$

si

$$m_r - 1 \le m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$$

$$m_r \le m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2 \quad .$$

(5) Daca $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_r, \dots) \in L_t$, $t \ge 3$, $2 \le r \le t-1$, $m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_r-1) = m_1 m_2 \dots m_r + 1$ si $m_r = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$, atunci :

$$m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{r-1}-1) = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1 \quad .$$

Intr-adevar, din

$$\frac{m_1 m_2 \dots m_{r-1}+1}{m_r - 1} = m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{r-1}-1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1}$$

si

$$m_r = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$$

rezulta :

$$m_0(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{r-1}-1) = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1 \quad .$$

Daca in $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \ge 3$, cel putin unul dintre numerele $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ ar fi par , atunci :

$n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t$ este par

$n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t - 1$ este impar

$n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1)(z_t-1)$ este impar

$n_0, n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{t-1} - 1$, $z_t - 1$ sunt impare

$n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt pare si n_0 este impar .

In caz contrar ,

$n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt impare .

(6) Daca $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \ge 2$, atunci toate numerele $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ au aceeasi paritate .

Sunt numai doua CAZURI :

CAZUL 1^0 : $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt impare ,

$2 \le n_0$, $3 \le n_1 \le n_2 \le \dots \le n_t$

CAZUL 2^0 : $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt pare si n_0 este impar ,

$3 \le n_0$, $2 \le n_1 \le n_2 \le \dots \le n_{t-1} \le z_t$.

Nu mai exista alte cazuri , in afara de “1^0” si “2^0” .

(7) Daca $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \ge 3$, atunci numerele $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt in CAZUL 1^0 ori in CAZUL 2^0 .

* * *

Daca $(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{t-1},x_t)\in L_t$, $t\geq 3$, spunem ca :
x_0 este pe pozitia "0" , x_1 este pe pozitia "1" , x_2 este pe pozitia "2" , … ,
x_{t-1} este pe pozitia "t−1" , x_t este pe pozitia "t" .
Cele mai mici numere *posibile* intr-un CAZ fixat dintre cele doua CAZURI posibile , oricare ar fi acest caz , pe pozitiile "0" , "1" , "2" , . . . , "t−1" , "t" ,
se noteaza , respectiv , cu $a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},a_t$, unde
($a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},a_t$)$\in L_t$.
Obtinem :
− in CAZUL 1^0 : $a_0=2$, $a_1=3$;
− in CAZUL 2^0 : $a_0=3$, $a_1=2$.
In ambele CAZURI :
$a_0(a_1-1)=a_1+1$ (Intr-adevar, 2(3-1)=3+1 si 3(2-1)=2+1 .) .
Reciproc , daca $a_0(a_1-1)=a_1+1$, atunci :
$a_0(a_1-1)=a_1-1+2$, $(a_0-1)(\ a_1-1\ )=2$, unde
$a_1-1\geq 1$; $a_0-1=1$, $a_1-1=2$ sau $a_0-1=2$, $a_1-1=1$
CAZUL 1^0 : $a_0=2$, $a_1=3$ sau CAZUL 2^0 : $a_0=3$, $a_1=2$.
Fixam un CAZ (CAZUL 1^0 ori CAZUL 2^0) , apoi continuam astfel :
Pentru $(a_0,a_1,x_2,\dots)\in L_t$, unde $t\geq 3$, dintr-o inegalitate nestricta a lui (3) obtinem :

$$a_0\,(a_1-1)(x_2-1)\geq a_1x_2+1$$
$$(a_1+1)(x_2-1)\geq a_1x_2+1$$
$$a_1x_2+x_2-a_1-1\geq a_1x_2+1$$
$$x_2\geq a_1+2\ .$$

Cel mai mic x_2 *posibil* este
$a_2=a_1+2$,
daca $(a_0,a_1,a_2,\dots)\in L_t$,
pentru care inegalitatile nestricte din ultima parte sunt realizate prin egalitati , deci :
$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)=a_1a_2+1$,
daca $(a_0,a_1,a_2,\dots)\subset L_t$.
Pentru $(a_0,a_1,a_2,x_3,\dots)\in L_t$, unde $t\geq 4$, dintr-o inegalitate nestricta a lui (3) obtinem :

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)(x_3-1)\geq a_1a_2x_3+1$$
$$(a_1a_2+1)(x_3-1)\geq a_1a_2x_3+1$$
$$a_1a_2x_3+x_3-a_1a_2-1\geq a_1a_2x_3+1$$
$$x_3\geq a_1a_2+2\ .$$

Cel mai mic x_3 *posibil* este
$a_3=a_1a_2+2$,
daca $(a_0,a_1,a_2,a_3,\dots)\in L_t$,
pentru care inegalitatile nestricte din ultima parte sunt realizate

prin egalitati , deci :

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)=a_1a_2a_3+1 \quad ,$$

$$daca \quad (a_0,a_1,a_2,a_3,\dots)\in L_t \quad , \text{ unde } t\geq 4 \quad .$$

Procedam analog , pas cu pas . Obtinem :

Pentru $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{r-1},x_r,\dots)\in L_t$, unde r este numar intreg, $2\leq r\leq t-1$, si

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{r-1}-1)=a_1a_2\dots a_{r-1}+1 \quad ,$$

dintr-o inegalitate nestricta a lui (3) obtinem

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{r-1}-1)(x_r-1)\geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r+1$$

$$(a_1a_2\dots a_{r-1}+1)(x_r-1)\geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r+1$$

$$a_1a_2\dots a_{r-1}x_r+x_r-a_1a_2\dots a_{r-1}-1\geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r+1$$

$$x_r\geq a_1a_2\dots a_{r-1}+2 \quad .$$

Cel mai mic x_r $posibil$ este

$$a_r=a_1a_2\dots a_{r-1}+2 \quad ,$$

$$daca \quad (a_0,a_1,a_2,\dots,a_r,\dots)\in L_t \quad , \quad \text{unde} \quad 2\leq r\leq t-1 \quad ,$$

pentru care inegalitatile nestricte din ultima parte sunt realizate

prin egalitati , deci :

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_r-1)=a_1a_2\dots a_r+1 \quad , \quad \text{unde} \quad 2\leq r\leq t-1 \quad .$$

Pentru $r=t-1$ si $t\geq 3$ obtinem :

$$a_{t-1}=a_1a_2\dots a_{t-2}+2 \ ,$$

$$daca \quad (a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},\dots)\in L_t \quad ,$$

si

$$a_0\,(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{t-1}-1)=a_1a_2\dots a_{t-1}+1 \quad .$$

Daca $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},\omega_t)\in L_t$, atunci :

$$a_0(a_1-1)\,(a_2-1)\dots(a_{t-1}-1)(\omega_t-1)=a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t-1$$

$$(a_1a_2\dots a_{t-1}+1)\,(\omega_t-1)=a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t-1$$

$$a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t+\omega_t-a_1a_2\dots a_{t-1}-1=a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t-1$$

$$\omega_t=a_1a_2\dots a_{t-1} \quad .$$

Numarul ω_t este determinat de $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1})$, unde $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},\omega_t)\in L_t$.

Toate conditionarile (care incep cu $daca\ \dots$) de pe parcurs si toate cele $posibile$ sunt indeplinite ,

deoarece apartenenta

$(a_0,a_1,a_2,\dots,a_{t-1},\omega_t)\in L_t$ este adevarata .

Constatam :

$$a_2=a_1+2=(a_1+1)^{2^0}+1 \quad , \quad \text{daca} \quad t\geq 3 \quad ;$$

$$a_3=a_1\,a_2+2=(a_2-2)a_2+2=a_2{}^2-2a_2+1+1=(a_2-1)^2+1=\left[(a_1+1)^{2^0}\right]^2+1$$

$$a_3=a_1\,a_2+2=(a_1+1)^{2^1}+1 \quad , \quad \text{daca} \quad t\geq 4 \quad ;$$

$a_4 = a_1\, a_2 a_3 + 2 = (a_1\, a_2) a_3 + 2 = (a_3 - 2) a_3 + 2 = (a_3 - 1)^2 + 1 = \left[(a_1+1)^{2^2}\right]^2 + 1$

$a_4 = a_1\, a_2 a_3 + 2 = (a_1+1)^{2^3} + 1$, daca $t \geq 5$.

Pentru un numar intreg r , $2 \leq r \leq t-1$,

$a_r = a_1\, a_2 \ldots a_{r-1} + 2 = (a_1+1)^{2^{r-2}} + 1$, daca $2 \leq r \leq t-1$.

Obtinem :

$(a_0, a_1, \ldots) \in L_t$

$a_0\,(a_1 - 1) - a_1 + 1$

In CAZUL 1^0 : $a_0 = 2$, $a_1 = 3$,

$a_r = (a_1+1)^{2^{r-2}} + 1 = 4^{2^{r-2}} + 1$, pentru $2 \leq r \leq t-1$

$\omega_t = (a_1+1)^{2^{t-2}} - 1 = 4^{2^{t-2}} - 1$.

In CAZUL 2^0 : $a_0 = 3$, $a_1 = 2$,

$a_r = (a_1+1)^{2^{r-2}} + 1 = 3^{2^{r-2}} + 1$, pentru $2 \leq r \leq t-1$

$\omega_t = (a_1+1)^{2^{t-2}} - 1 = 3^{2^{t-2}} - 1$.

Consacram notatiile $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, \omega_t$ pentru aceste numere , in orice CAZ

(CAZUL 1^0 sau CAZUL 2^0 . Nu mai exista alte CAZURI !) .

Parcurgem drumul in sens invers , in situatia $t \geq 3$,
fara sa schimbam numerele cu notatiile consecrate anterior , $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, \omega_t$,
intr-unul dintre cele doua CAZURI , oricare ar fi CAZUL (CAZUL1^0 sau CAZUL2^0) .

Obtinem :

$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, \omega_t) \in L_t$

$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-1} - 1)(\omega_t - 1) = a_1 a_2 \ldots a_{t-1}\, \omega_t - 1$

$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-1} - 1)(\omega_t - 1) =$
$a_1 a_2 \ldots a_{t-1}(\omega_t - 1) + a_1 a_2 \ldots a_{t-1} - 1$

$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{t-1} - 1}{\omega_t - 1} = a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-1} - 1) - a_0 a_1 a_2 \ldots a_{t-1}$ si

$\omega_t = a_1 a_2 \ldots a_{t-1}$.

Din acestea si (3) rezulta ca :

numarul $\omega_t = a_1 a_2 \ldots a_{t-1}$ este cel mai mare numar *posibil* pe pozitia "t" , pentru
care obtinem :

$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-1} - 1) = a_1 a_2 \ldots a_{t-1} + 1$

si

$a_{t-1} = a_1 a_2 \ldots a_{t-2} + 2$ este cel mai mare numar *posibil* pe pozitia "t−1" ,

conform relatiei (4) .

Din ultimele doua egalitati si (5) rezulta ca :

$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-2} - 1) = a_1 a_2 \ldots a_{t-2} + 1$.

Procedam analog , pas cu pas .

Din

$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{t-s+1} - 1) = a_1 a_2 \ldots a_{t-s+1} + 1$, pentru $2 \leq s \leq t-1$,

$a_{t-s+1} = a_1 a_2 \dots a_{t-s} + 2$ este cel mai mare numar *posibil* pe pozitia "t−s+1" , si (5) obtinem :

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{t-s}-1) = a_1 a_2 \dots a_{t-s} + 1 \quad .$$

Notam :

$r = t - s + 1$, pentru $2 \leq s \leq t-1$, $2 \leq r \leq t-1$

Rezulta ca :

Din (4) si (5) obtinem : numarul $a_r = a_1 a_2 \dots a_{r-1} + 2$ este cel mai mare numar *posibil* pe pozitia "r" , unde $2 \leq r \leq t-1$, pentru care obtinem :

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_r-1) = a_1 a_2 \dots a_r + 1 \quad , \quad 2 \leq r \leq t-1 \quad ,$$

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{r-1}-1) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} + 1 \quad , \quad 2 \leq r \leq t-1$$

.

Pentru $s = t-1$ (sau $r = 2$) rezulta :

Numarul $a_2 = a_1 + 2$ este cel mai mare numar pe pozitia "2" , pentru care obtinem :

$$a_0(a_1-1)(a_2-1) = a_1 a_2 + 1 \quad ,$$

$$a_0(a_1-1) = a_1 + 1 \quad .$$

Din ultima egalitate obtinem a_1 , care este cel mai mare numar pe pozitia "1" si a_0 , care este cel mai mare numar pe pozitia "0" , in CAZUL 1^0 ori in CAZUL 2^0 .

Numerele $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ sunt toate simultan in acelasi CAZ , oricare ar fi acest CAZ (CAZUL 1^0 ori CAZUL 2^0) . Acestea au fost calculate anterior .

Intr-un CAZ fixat a_0 , a_1 , a_2 , … , a_{t-1} , a_t sunt si cele mai mari si cele mai mici , deci sunt *unice* pe pozitiile , respectiv, "0" , "1" , "2", …. , "t−1" , "t" .

Rezulta :

$$L_t = \{(2, 3, 4^{2^0}+1, 4^{2^1}+1, \dots, 4^{2^{t-3}}+1, 4^{2^{t-2}}-1), (3, 2, 3^{2^0}+1, 3^{2^1}+1, \dots, 3^{2^{t-3}}+1, 3^{2^{t-2}}-1)\},$$

pentru $t \geq 3$.

Din aceasta si cele de pe tot parcursul , inclusiv (2) , rezulta :

TEOREMA 1. Daca $(c, b_1, b_2, \dots, b_{t-1}, \beta_t) \in L_t$, unde $t \geq 2$, atunci :

$$\beta_t = b_1 b_2 \dots b_{t-1} \quad .$$

* * *

Presupunem ca exista numere intregi N si k , $N \geq 2$, $k \geq 1$, astfel incat :

(8) $\quad k[N] = N - 1$, unde N si k sunt numere intregi , $N \geq 2$, $k \geq 1$.

Fixam un N si un k astfel incat (8) este adevarata , in conditiile impuse , pe care nu le schimbam pana la sfarsit , oricare ar fi acestea .

Pentru acest N exista si sunt unice urmatoarele numere intregi cu proprietatile alaturate lor :

numarul intreg t , $t \geq 1$

numerele $prime$ $p_1, p_2, \dots, p_t$, $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_t$ (daca $t \geq 2$) ,

respectiv , numerele intregi $r_1, r_2, \dots, r_t$, $r_1 \geq 1, r_2 \geq 1, \dots, r_t \geq 1$,

astfel incat

(9) $$N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t}$$.

([1] , $p.74$)

Pentru (9) obtinem :

(10) $$\phi[N] = p_1^{r_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{r_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_t^{r_t - 1}(p_t - 1)$$.

([1] , $p.118$)

Presupunem ca ar exista cel putin un numar intreg s , $1 \leq s \leq t$, astfel incat $r_s \geq 2$. Pentru un astfel de s ,din (10) , (9) si (8) obtinem : numarul p_s ar $divide$ 1 , care contrazice $2 \leq p_s$. Deci presupunerea facuta este falsa . In consecinta $r_1 = r_2 = \dots = r_t = 1$ si din (9) , (10) si (8) obtinem urmatoarele trei egalitati , respectiv :

(11) $$N = p_1 p_2 \dots p_t$$

(12) $$\phi[N] = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1)$$

(13) $$k\,(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1) = p_1 p_2 \dots p_t - 1$$.

Presupunem ca $t \geq 2$. Din (1) si (13) , tinand seama de proprietatile numerelor care sunt in (13) , obtinem :

(14) $$(k, p_1, p_2, \dots, p_t) \in I_t$$.

Deoarece $t \geq 2$, din (14) si TEOREMA 1. rezulta :

(15) $$p_t = p_1 p_2 \dots p_{t-1}$$.

- Daca $t - 2$, din (15) obtinem $p_2 - p_1$, care contrazice $p_1 < p_2$.

  Deci $t \neq 2$.

- Daca $t \geq 3$, din (15) obtinem :

  $p_t = p_1 p_2 \dots p_{t-1}$, unde $t - 1 \geq 2$,

  care contrazice p_t este $prim$. Deci $t \ngeq 3$.

- Deoarece t este numar intreg , $t \geq 1$, $t \neq 2$ si $t \ngeq 3$ rezulta ca

  $t = 1$, situatie in care din (11) ,(12) , (13) obtinem , respectiv :

(16) $N = p_1$, unde p_1 este $prim$, $p_1 \geq 2$

(17) $$\phi[N] = p_1 - 1$$

(18) $k(p_1 - 1) = p_1 - 1$, unde $p_1 - 1 \geq 1$.

Din (18) obtinem :

$(k-1)(p_1-1)=0$, unde $p_1-1\neq 0$

$k-1=0$

$k-1$.

Din (8) am obtinut N este *prim* si $k=1$. Aceste conditii sunt *necesare* pentru (8) . .

Reciproc , daca N este *prim* , $N\geq 2$, si $k=1$, atunci :

$\phi[N]=N\quad 1$, $1\cdot(N\quad 1)=N\quad 1$, deci k $\phi[N]=N\quad 1$, care este chiar (8) .

Am demonstrat *suficienta* conditiilor . Obtinem :

TEOREMA 2. Fie numerele intregi **N** si k , $N\geq 2$ si $k\geq 1$.

(i) $k[N]=N-1$ **daca si numai daca** N **este** *prim* **si** $k=1$.

(ii) $[N]$ *divide* $N-1$ **daca si numai daca** N **este** *prim* .

Am demonstrat (i) . Din (i) rezulta (ii) .

Prin TEOREMA 2. am rezolvat Ecuatia $k[N]==N\quad 1$ si Conjectura lui D.H.Lehmer referitoare la aceasta .

B I B L I O G R A F I E

[1] **Vasile BOBANCU si colaboratorii** , ***Dictionar de Matematici Generale*** , Editura Enciclopedica Romana ,1974

[2] **Marian DEACONESCU , ON THE EQUATION m$-1=a\varphi(m)$**, INTEGERS : ELECTRONIC JURNAL OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY 6 (2006) , A06

[3] **Nicodim A. NEGREA** , ***Solutionarea unei conjecturi din 1932 a lui D. H. Lehmer in 2010*** , Revista Electronica MateInfo.ro ISSN 2065-6432 Noiembrie 2010

[4] **John RENZE** , ***Computational Evidence for Lehmer's Totient Conjecture*** , ***Wolfram Library Archive***

5. Teorema lui Lagrange ; Aplicații ale teoremei lui Lagrange în demonstrarea unor relații trigonometrice

Prof. Voinea-Axinte Costică
Liceul Tehnologic "Elie Radu" Botoşani

Noțiuni teoretice

Teorema (Teorema lui Lagrange sau teorema creşterilor finite)

Fie f o funcție Rolle pe un interval compact $[a,b]$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstrație: Considerăm funcția auxiliară $F:[a,b] \to \mathbf{R}, F(x) = f(x) - k \cdot x$, unde k este o constantă reală pe care o determinăm astfel încât F(a) = F(b).

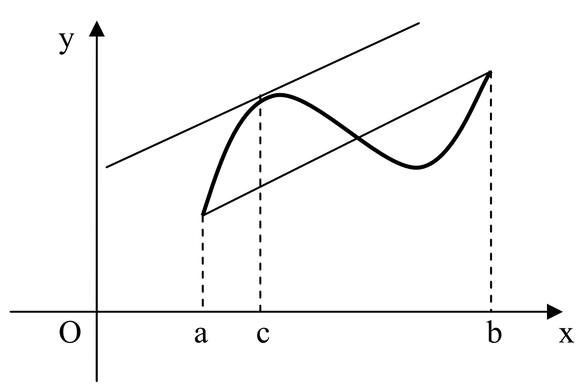
$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Leftrightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pentru $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ funcția $F:[a,b] \to R, F(x) = f(x) - k \cdot x$ verifică condițiile teoremei lui Rolle $\Rightarrow \exists \quad c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$.

Dar $F'(x) = f'(x) - k, \forall x \in (a,b)$, $f'(c) - k = 0 \Rightarrow f'(c) = k \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Observație (Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange)

Fie f o funcție Rolle pe un interval compact $[a,b]$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în $(c, f(c))$ este paralelă cu coarda determinată de punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.



Observația Se poate aplica teorema lui Lagrange restricției funcției f la orice subinterval [a, x] $\subset$ [a, b], unde a < x $\leq$ b. În acest caz $\exists c_x \in (a, x)$ care depinde de x astfel încât

$f(x) - f(a) = (x-a)f'(c_x)$. Dacă $x \to a$ atunci $c_x \to a$.

Obsservația Dacă în formula creşterilor finite notăm $\lambda = \dfrac{c-a}{b-a}$, obținem $0 < \lambda < 1$ şi

$c = a + \lambda(b-a)$. În acest caz concluzia teoremei lui Lagrange se mai scrie:

$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(a + \lambda(b-a))$, cu $0 < \lambda < 1$.

Consecinta functii cu derivata nula. Daca o functie are derivata nula pe un interval, atunci ea este constanta pe acest interval.

Demostratie: Fie $f : E \to R$ o functie derivabila in punctele din interiorul lui E si continua pe E, E interval si $a \in E$ fixat. Daca $x \in E$ este arbitrar, atunci conform teoremei lui Lagrange aplicata functiei f pe intervalul [a,x] sau [x,a] exista un punct $c \in (a, x)$ sau $c \in (x, a)$ astfel incat $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c)$. Cum $f'(c) = 0$ avem f(x)=f(a), oricare ar fi x din E, ceea ce arata ca f este constanta pe E.

Consecinta functii cu derivate egale. Daca doua functii au derivatele egale pe un interval, atunci ele difera printr-o constanta pe acel interval.

Demonstratie: Fie $f, g : E \to R$ derivabile pe interiorul lui E si continue pe E,E fiind interval, cu $f'(x) = g'(x), \forall x \in E$. Aceasta conditie scrisa sub forma $(f-g)(x) = 0, \forall x \in E$ arata ca se poate aplica consecinta 1. Deci exista o constanta $k \in R$ astfel incat $f(x) - g(x) = k, \forall x \in E$, altfel spus cele 2 functii difera printr-o constanta pe intervalul E

Consecinta monotonia functiilor. *Fie $f : E \to R$, E interval, o functie derivabila.*

1) *Daca $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$ atunci f este crescatoare pe E:*
2) *Daca $f'(x) \leq 0, \forall x \in E$ atunci f este descrescatoare pe E;*
3) *Daca $f'(x) > 0, \forall x \in E$ atunci f este strict crescatoare pe E;*
4) *Daca $f'(x) < 0, \forall x \in E$ atunci f este strict descrescatoare pe E*

Demonstratie: Fie $x_1, x_2 \in E; x_1 < x_2$ si $f'(x) \geq o, \forall x \in E$. Aplicand teorema lui Lagrange pe intervalul [x_1,x_2], exista $c \in (x_1, x_2)$ astfel incat $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0$ ceea ce arata ca $f(x_1) \leq f(x_2)$, deci functia este crescatoare pe E.

Prima parte a acestei teoreme poate fi intarita in sensul ca exista functii astfel incat $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$, dar f sa fie strict crescatoare pe E , exemplul uzual fiind cel al functiei putere $f : R \to R, f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in R$, dar functia f este o functie strict crescatoare.

Asadar avem teorema: Functia f este strict crescatoare daca $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$ si multimea punctelor in care derivata se anuleaza nu include nici un interval nedegenerat.

Consecinta derivata unei functii intr-un punct. Fie $f : E \to R$,E interval si $x_0 \in E$. Daca: 1) f este continua in x_0;

2) f este derivabila pe E-{x_0};

3) exista $\lim f'(x) = l \in \overline{R}$
atunci f are derivata in x_0 si f`(x_0)=l

Consecința Fie f o funcție definită pe o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ şi continuă în x_0. Dacă există limita $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, atunci $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0) = \lambda$. Dacă λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0.

Demonstrație Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe un interval $[x, x_0] \subset V, x < x_0 \Rightarrow$ $\exists \quad c_x \in (x, x_0)$ astfel încât $f'(c_x) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Prin urmare: $f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda$ (deoarece $c_x \to x_0$ dacă $x \to x_0, x < x_0$).

Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe un interval $[x_0, x] \subset V, x > x_0 \Rightarrow \exists \quad c_x \in (x_0, x)$ astfel încât $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Prin urmare: $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(c_x) = \lambda$ (deoarece $c_x \to x_0$ dacă $x \to x_0, x > x_0$).

Din $f_s'(x_0) = \lambda$ şi $f_d'(x_0) = \lambda \overset{f \quad continua}{\Rightarrow}$ f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \lambda$.

Dacă în plus λ este finit $\overset{definitiei \quad derivatei}{\Rightarrow}$ f este derivabilă în x_0.

Aplicaţii ale teoremei lui Lagrange în demonstrarea unor relaţii trigonometrice

Aplicatia 1. $cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$, $sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$
Solutie: Considerăm funcția $f(x) = cos^2x - \frac{1}{2}cos2x$, o funcție derivabilă cu derivata $f'(x) = -2sinxcosx - \frac{1}{2}(-2)sin2x = 0, (\forall)x \in R$, deci conform "**Consecinta functii cu derivata nula**" f este constantă. Cum $f(0) = \frac{1}{2}$ rezultă că $f = \frac{1}{2}$, adică $cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$

Analog alegem $g(x) = sin^2 x + \frac{1}{2}cos2x$, funcție derivabilă cu derivata $g'(x) = 2sinxcosx + \frac{1}{2}(-2)sin2x = 0$, $(\forall)x \in R$ deci conform ”Consecinta functii cu derivata nula” f este constantă. Cum g(0)=1/2 rezultă că g=1/2 , adică, $sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$

Aplicatia 2. $arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2arctgx$

Solutie: Cum $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1, (\forall)x \in R$, relația dată are sens. Considerăm funcția $f(x) = arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2arctgx$.

$$f'(x) = -\frac{\frac{-2x(1-x^2)-2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

deci conform ”**Consecinta functii cu derivata nula”** f este constantă.
Cum f(0)=0, rezultă că f=0

Aplicatia 3. $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, (\forall)x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Solutie: Considerăm funcția $f(x) = arcsinx + arccosx$. Cum $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ deci conform ”Consecinta functii cu derivata nula” f este constantă. Cum $f(0) = \frac{\pi}{2}$, rezultă $f = \frac{\pi}{2}$

Bibliografie:

Gh. Gussi, O. Stăbăşilă, I. Stoica, MATEMATICA - Elemente De Analiza Matematica - Clasa XI – EDP, 1991