REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISBN 2065-6432

IULIE 2014

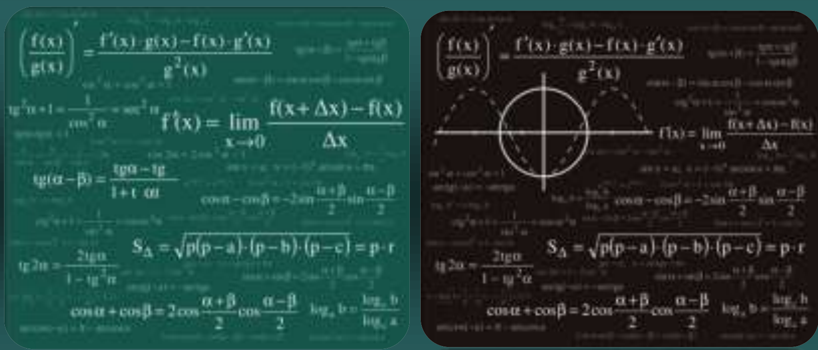
REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

DE PESTE 4 ANI ÎN FIECARE LUNĂ

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro



Articole :

1. Other solutions to some problems from La Gaceta (see No. 2, 2014)

By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău
and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

PROBLEMA 225. *Propuesto por Francisco Bellot Rosado, Valladolid.*

Sean AHD, BHE y CHF las tres alturas de un triángulo ABC ($D \in BC$, etc.), H su ortocentro y G su baricentro. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos AGD, BGE y CGF se cortan, además de en G, en un segundo punto que es la intersección de la recta de Euler de ABC con el eje radical de la circunferencia circunscrita a ABC y la circunferencia de los nueve puntos de ABC.

Solution:

Let O be the circumcenter the radius R and ω the center of nine points circle with radius $\frac{R}{2}$.

If circumscribed circle to triangle AGD intersect Euler's line in the point T, we have

$$HT \cdot HG = HA \cdot HD \Rightarrow HT = \frac{4R^2 \cos A \cos B \cos C}{HG},$$

and it is obvious that the circumscribed circles to BGE and CGF also passing through the point T.

It remains to show that the powers of T to circumscribed circle and to nine points circle are equal.

Since,

$$TO = TH + OH, T\omega = TH + \frac{OH}{2}$$

and

$$OH^2 = R^2(1 - \cos A \cos B \cos C)$$

we have to show that

$$TO^2 - R^2 = T\omega^2 - \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow (TO - T\omega)(TO + T\omega) = \frac{3R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OH}{2}\left(2TH + \frac{3OH}{2}\right) = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow OH \cdot TH = \frac{3R^2}{4} - \frac{3OH^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OH \cdot \frac{4R^2 \cos A \cos B \cos C}{HG} = \frac{3}{4} \cdot 8R^2 \cos A \cos B \cos C$$

$\Leftrightarrow 2OH = 3HG \Leftrightarrow 2HG + 2GO = 3HG \Leftrightarrow HG = 2 \cdot GO$, which is true.

The proof is complete.

Problema 227. *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego de Córdoba, Córdoba.*

Sean ABC un triángulo rectángulo en A y D un punto sobre la recta BC distinto de B y C. Sean E y F las proyecciones ortogonales de D sobre las rectas AB y AC, respectivamente. Consideramos además los puntos de intersección $U = AD \cap EF$, $V = BF \cap DE$ y $W = CE \cap DF$. Probar que el triángulo UVW es isósceles, con $UV = UW$, si y solo si AD es una de las bisectrices trazadas por A.

Solution:

We denote $a = BC, b = CA, c = AB$ and we consider the case D is in interior of the segment BC; if D is in exterior of the segment BC the solution is similar.

We denote $x = \frac{DB}{DC}$, then we have $BD = \frac{ax}{x+1}$, $DC = \frac{a}{x+1}$, $EB = \frac{cx}{x+1}$, and $FD = AE = \frac{c}{x+1}$. From similarity we obtain

$$\frac{WD}{EB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow WD = \frac{cx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{WF}{AE} = \frac{CF}{CA} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow WF = \frac{c}{(x+1)^2}.$$

Since $AEDF$ is rectangle, we can denote $t = UD = UF = UE$. Applying the theorem of Stewart in triangle UFD, we deduce that

$$UF^2 \cdot WD - UW^2 \cdot FD + UD^2 \cdot FW = WF \cdot WD \cdot FD$$

$$\Leftrightarrow t^2 \cdot \frac{cx}{(x+1)^2} - UW^2 \cdot \frac{c}{x+1} + t^2 \cdot \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{cx}{(x+1)^2} \cdot \frac{c}{(x+1)^2} \cdot \frac{c}{x+1}, \text{ i.e}$$

$$UW^2 = t^2 - \frac{cx}{(x+1)^3}.$$

Analogous we obtain

$$UV^2 = t^2 - \frac{b \cdot \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^3} = t^2 - \frac{bx^2}{(x+1)^3}.$$

Using the theorem of bisector and converse we obtain

$$UV^2 = UW^2 \Leftrightarrow \frac{cx}{(x+1)^3} = \frac{bx^2}{(x+1)^3} \Leftrightarrow x = \frac{c}{b} \Leftrightarrow AD \text{ is the bisector from } A.$$

PROBLEMA 228. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño, y Emilio Fernández Moral, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.*

En la figura siguiente, las circunferencias de centros O_1 y O_2, que son tangentes a las semicircunferencias de diámetros AC y AB, CB y AB respectivamente, son también tangentes en los puntos N y M, respectivamente, a la tangente común CD a las semicircunferencias de diámetros AC y CB. Los segmentos NQ y MP son diámetros de las circunferencias pequeñas. La recta MQ corta además en R a la circunferencia de centro O_1, y la recta NP corta además en S a la circunferencia de centro O_2. Y resulta que $RMSN$ es un cuadrado. ¿Cuál es la razón entre los diámetros AC y AB?

Solution:

We denote U the midpoint of AC, V the midpoint of BC, Z the midpoint of AB and $T = MN \cap O_1O_2$.

Because $NS \| RM$ and $QN \| MP$ we have that $QMPN$ is parallelogram, so $QN = MP$.

We denote $O_1N = O_2M = r, UA = x, VB = y$ and we deduce $ZA = x + y$, $ZC = x - y$.

From right angles trapezoids CVO_2M, respectively CUO_1N we obtain that

$$CM = 2\sqrt{yr}\,, CN = 2\sqrt{xr}\,, MN = CN - CM = 2\sqrt{r}(\sqrt{x} - \sqrt{y})\,.$$

On the other hand the rihht angles triangle NMP is isosceles, so $MN = MP = 2r$, i.e.

$$\sqrt{r} = \sqrt{x} - \sqrt{y}\text{, so } r = x + y - 2\sqrt{xy}\,.$$

Because the circles are tangent we have

$$ZO_1 = ZO_2 = x + y - r = x + y - (x + y - 2\sqrt{xy}) = 2\sqrt{xy}\,.$$

We will calculate ZT from two right triangles, ZCT respectively ZO_2T (T is the midpoint of MN).

$$ZT^2 = ZC^2 + CT^2 = (x-y)^2 + (CM + TM)^2 = (x-y)^2 + \left(\sqrt{r}(\sqrt{x} + \sqrt{y})\right)^2 =$$
$$= (x-y)^2 + \left((\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})\right)^2 = 2(x-y)^2.$$

$$ZT^2 = ZO_2^2 - TO_2^2 = 4xy - (r\sqrt{2})^2 = 4xy - 2(x + y - 2\sqrt{xy})^2 = 4xy - 2(x+y)^2 - 8xy +$$
$$+ 8(x+y)\sqrt{xy}\,.$$

We obtain the equation

$$x^2 + y^2 + xy - 2x\sqrt{xy} - 2y\sqrt{xy} = 0,$$

and if we denote

$$x = a^2, y = b^2 \text{ and } \frac{a}{b} = t$$

we have to solve the equation

$$t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 1 = 0\text{, with } t > 1.$$

Hence,

$t+\frac{1}{t}=1+\sqrt{2}\Rightarrow t^2-(1+\sqrt{2})t+1=0\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$, i.e.

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)^2.$$

Therefore,

$$\frac{AC}{AB}=\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1+2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{3+2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$, and we are done

2. Zece soluții pentru problema 26261 din Gazeta Matematică, nr. 2/2010

Prof. Ioan Viorel Codreanu, Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Vom prezenta zece soluții pentru problema următoare:

Problema 26261, G.M. 2/2010. ***Să se arate că, pentru orice*** $x,y,z>0$ **:**

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 6$$

Cătălin Cristea, Craiova

Cu acest prilej vor fi puse în evidență diverse procedee de lucru și tehnici de calcul.

Soluția 1. (din G.M. 7-8-9/2010)

Avem $y^2+z^2+\frac{1}{2}\geq 2yz+\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{yz}$, deci $\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2x}\geq\frac{2\sqrt{yz}}{x}$ și analoagele.

Sumând, rămâne să arătăm că $\sum\frac{\sqrt{yz}}{x}\geq 3$, ceea ce rezultă din inegalitatea mediilor.

Soluția 2.

Folosind **Inegalitatea Bergström** obținem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}=\sum\frac{y^2}{x}+\sum\frac{z^2}{x}\geq\frac{\left(2\sum x\right)^2}{2\sum x}=2\sum x.$$

Este suficient să demonstrăm inegalitatea

$$2\sum x+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 6.$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem

$$2\sum x+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\left(\sum x\right)\left(\sum\frac{1}{x}\right)}=2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\sum\frac{1}{x}\right)}$$

și ținând seama de **Inegalitatea MA-MH** $\left(\sum x\right)\left(\sum\frac{1}{x}\right)\geq 9$ soluția este completă.

Soluția 3.

Folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 2\sum\frac{yz}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 6\sqrt[6]{2^3\left(\prod\frac{yz}{x}\right)\cdot\frac{1}{2^3}\left(\prod\frac{1}{x}\right)}=6.$$

Soluția 4.

Folosind **Inegalitatea Bergström** obținem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}=\sum\frac{y^2}{x}+\sum\frac{z^2}{x}+\sum\frac{1^2}{2x}\geq\frac{\left(2\sum x+3\right)^2}{4\sum x}$$

Rămâne să demonstrăm inegalitatea

$$\frac{\left(2\sum x+3\right)^2}{4\sum x}\geq 6$$

care rezultă ușor ținând seama că $\left(2\sum x+3\right)^2\geq 4\cdot 3\cdot 2\sum x=24\sum x$.

Soluția 5.

Folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem

$$\frac{y^2}{x}+\frac{1}{4x}\geq 2\sqrt{\frac{y^2}{x}\cdot\frac{1}{4x}}=\frac{y}{x}$$

și analoagele.

Avem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq\sum\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)=\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq\sum 2=6.$$

Soluția 6.

Folosind inegalitățile $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ și **Inegalitatea MA-MG**, obținem

$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq\frac{(x+y)^2}{2z}+\frac{1}{x+y}\geq 2\sqrt{\frac{x+y}{2z}}$$

și analoagele.

Folosind **Inegalitatea MA-MG** și binecunoscuta inegalitate $\prod(x+y)\geq 8\prod x$, obținem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 2\sum\sqrt{\frac{x+y}{2z}}\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{x+y}{2z}}}=6\sqrt[6]{\frac{\prod(x+y)}{\prod x}}\geq 6.$$

Soluția 7.

Cu substituțiile $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ inegalitatea dată se scrie

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\sum a\geq 6.$$

În această soluție vom folosi ***inegalitatea L 222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012*** :

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{18}{\sum a}.$$

Această inegalitate a primit foarte multe soluții și generalizări în [2],[3] și [4].

Avem

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\sum a\geq\frac{18}{\sum a}+\frac{1}{2}\sum a$$

și folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem

$$\frac{18}{\sum a}+\frac{1}{2}\sum a\geq 2\sqrt{\frac{18}{\sum a}\cdot\frac{\sum a}{2}}=6$$

și soluția este completă.

Soluția 9.

Avem

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq 6\Leftrightarrow 2\sum\left(x^3y+xy^3\right)+\sum xy\geq 12\prod x.$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem $x^3y+xy^3\geq 2x^2y^2$ și analoagele ei. Pe de altă parte folosind **Inegalitatea MA-MG** obținem $\sum x^2y^2\geq 3\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^4}$ și

$\sum xy\geq 3\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^2}$.

Atunci, folosind rezultatele anterioare și în final **Inegalitatea MA-MG**, avem

$$2\sum\left(x^3y+xy^3\right)+\sum xy\geq 4\sum x^2y^2+\sum xy\geq 12\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^4}+3\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^2}\geq$$
$$\geq 2\sqrt{36\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^6}}=12\prod x$$

și soluția este completă.

Soluția 10.

Putem să presupunem că $x\leq y\leq z$ fără a restrânge generalitatea. Ca urmare, $\frac{1}{z}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{x}$ și

$x^2+y^2\leq z^2+x^2\leq y^2+z^2$. Aplicând **Inegalitatea Cebîșev**, obținem

$$\sum\left(\frac{1}{x}\left(y^2+z^2\right)\right)\geq\frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{x}\right)\left(\sum\left(y^2+z^2\right)\right)\geq\frac{2}{3}\left(\sum\frac{1}{x}\right)\left(\sum yz\right).$$

Atunci

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{x}\geq\left(\sum\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{3}\sum yz+\frac{1}{2}\right)\geq\left(\sum\frac{1}{x}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum yz}=$$
$$=2\left(\sum\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{\sum yz}{3}}\geq 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\prod x}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\left(\prod x\right)^2}}=6$$

unde am folosit de mai multe ori **Inegalitatea MA-MG**.

Bibliografie:

[1] ***Gazeta Matematică, nr. 7-8-9/2010.***

[2] ***Titu Zvonaru, Câteva soluții la problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012,***

Recreații Matematice, nr. 2/2012.

[3] ***Problema L222 din nr. 1/2012 revizitată, Recreații Matematice, nr. 1/2013.***

[4] ***Ioan Viorel Codreanu, 17 soluții și o generalizare pentru problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012, Revista de Mateinfo.RO, Ianuarie 2013.***

.

3.ŞIRURI DE ARII DE SUPRAFEŢE TRAPEZOIDALE (III)

Prof. Văcărean Sorina, Colegiul Naţional „George Bariţiu”, Cluj-Napoca

$\boxed{3.}$ Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Lungimile bazei mari, bazei mici şi înălţimii, exprimate în u, sunt a, b şi h. Fie $A_1 \in (DA)$, $B_1 \in (CB)$ astfel încât $\frac{DA_1}{DA} = \frac{CB_1}{CB} = \frac{1}{2}$, $A_2 \in (A_1A)$, $B_2 \in (B_1B)$ astfel încât $\frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{1}{3}$, $A_3 \in (A_2A)$, $B_3 \in (B_2B)$ astfel încât $\frac{A_2A_3}{A_2A} = \frac{B_2B_3}{B_2B} = \frac{1}{4}$, …, $A_n \in (A_{n-1}A)$, $B_n \in (B_{n-1}B)$ astfel încât $\frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}A} = \frac{B_{n-1}B_n}{B_{n-1}B} = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A_0 = D$ şi $B_0 = C$. Se notează cu s_i aria suprafeţei patrulaterului ABB_iA_i, $i \in \mathbb{N}$, cu t_j aria suprafeţei patrulaterului CDA_jB_j, $j \in \mathbb{N}^*$ şi cu v_m aria suprafeţei patrulaterului $A_mB_mB_{m+1}A_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}^*$, exprimate în u^2.

a) Calculaţi l_n în funcţie de a şi b, unde $l_n = A_nB_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

c) Arătaţi că $l_n^2 > l_{n-1} \cdot l_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculaţi h_n în funcţie de h, $h_n = A_nE_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $A_nE_n \perp AB$, $E_n \in (AB)$ şi $E_0 = E$.

e) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$.

f) Arătaţi că $h_n^2 < h_{n-1} \cdot h_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Calculaţi s_n în funcţie de a, b şi h, $n \in \mathbb{N}$.

h) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

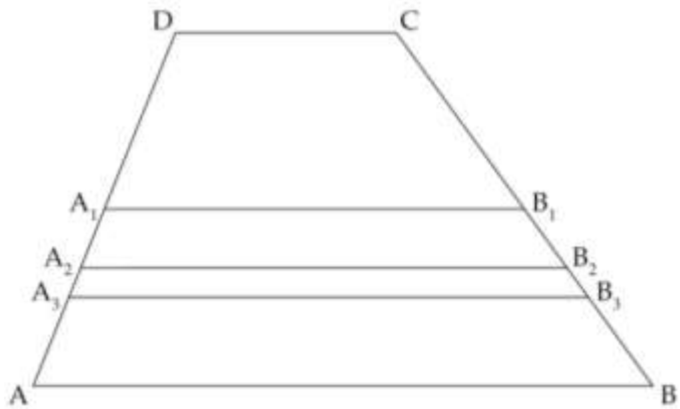
i) Calculaţi t_n în funcţie de a, b şi h, $n \in \mathbb{N}^*$.

j) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

k) Calculaţi v_n în funcţie de a, b şi h, $n \in \mathbb{N}^*$.

l) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Rezolvare:



a) Folosim rezultatele demonstrate în studiul „Şiruri de arii de suprafeţe trapezoidale (I)", apărut în Revista Mateinfo.ro din mai 2014, la problema $\boxed{1.}$ a) 1) – 4), unde am găsit:

$$(12)\quad l_i = \frac{a+(k-1)l_{i-1}}{k},\ i \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ l_0 > 0.$$

1) Calculăm l_1 în funcţie de a şi b.

Din (12), pentru $i=1$ şi $k=2$, avem: $l_1 = \dfrac{a+l_0}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

2) Calculăm l_2 în funcţie de a şi b.

Din (12), pentru $i=2$ şi $k=3$ şi din 1), avem: $l_2 = \dfrac{a+2l_1}{3} = \dfrac{a+2\cdot\dfrac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{2a+b}{3}$.

3) Calculăm l_3 în funcţie de a şi b.

Din (12), pentru $i=3$ şi $k=4$ şi din 2), avem: $l_3 = \dfrac{a+3l_2}{4} = \dfrac{a+3\cdot\dfrac{2a+b}{3}}{4} = \dfrac{3a+b}{4}$.

4) Calculăm l_4 în funcţie de a şi b.

Din (12), pentru $i=4$ şi $k=5$ şi din 3), avem: $l_4=\frac{a+4l_3}{5}=\frac{a+4\cdot\frac{3a+b}{4}}{5}=\frac{4a+b}{5}$.

5) Deducem formula pentru l_n în funcţie de a şi b, $n\in\mathbb{N}$.

Cum $l_1=\frac{a+b}{2}$, $l_2=\frac{2a+b}{3}$, $l_3=\frac{3a+b}{4}$, $l_4=\frac{4a+b}{5}$, presupunem că:

(13) $l_n=\frac{na+b}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

6) Demonstrăm propoziţia (13) prin inducţie matematică.

Etapa de verificare: Pentru $n=1$ propoziţia $l_1=\frac{a+b}{2}$ este adevărată.

Etapa de demonstraţie: Presupunem că propoziţia (13) este adevărată. Vrem să arătăm că $l_{n+1}=\frac{(n+1)a+b}{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$. Din (12) pentru $i=n+1$ şi $k=n+2$ şi din ipoteza de inducţie rezultă că $l_{n+1}=\frac{a+(n+1)l_n}{n+2}=\frac{a+(n+1)\cdot\frac{na+b}{n+1}}{n+2}=\frac{(n+1)a+b}{n+2}$, ceea ce trebuia dovedit.

Verificarea şi demonstraţia fiind efectuate, rezultă că propoziţia (13) este adevărată.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na+b}{n+1}=a$.

c) $l_n^2>l_{n-1}\cdot l_{n+1}\Leftrightarrow\left(\frac{na+b}{n+1}\right)^2>\frac{(n-1)a+b}{n}\cdot\frac{(n+1)a+b}{n+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(n^2a^2+2nab+b^2\right)\left(n^2+2n\right)>\left(n^2a^2+2nab+b^2-a^2\right)\left(n^2+2n+1\right)$. Notând $n^2a^2+2nab+b^2=x$ şi $n^2+2n=y$, inegalitatea este echivalentă cu

$xy>\left(x-a^2\right)(y+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy>xy+x-a^2y-a^2\Leftrightarrow a^2y+a^2-x>0$. Revenind la notaţie, inegalitatea este echivalentă cu

$n^2a^2+2na^2+a^2-n^2a^2-2nab-b^2>0\Leftrightarrow 2na(a-b)+(a-b)(a+b)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)(2na+a+b)>0$, ceea ce este adevărat.

d) La problema $\boxed{1.}$ e) din studiul „Şiruri de arii de suprafeţe trapezoidale (I)”, apărut în Revista Mateinfo.ro din mai 2014, am găsit:

$$(14)\quad h_i = \frac{k-1}{k} h_{i-1},\ i \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ h_0 > 0.$$

1) Calculăm h_1 în funcţie de h.

Din (14), pentru $i=1$ şi $k=2$, avem: $h_1 = \frac{1}{2} h_0 = \frac{1}{2} h$.

2) Calculăm h_2 în funcţie de h.

Din (14), pentru $i=2$ şi $k=3$ şi din 1), avem: $h_2 = \frac{2}{3} h_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{3} h$.

3) Calculăm h_3 în funcţie de h.

Din (14), pentru $i=3$ şi $k=4$ şi din 2), avem: $h_3 = \frac{3}{4} h_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{4} h$.

4) Calculăm h_4 în funcţie de h.

Din (14), pentru $i=4$ şi $k=5$ şi din 3), avem: $h_4 = \frac{4}{5} h_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{5} h$.

Metoda I:

5) Deducem formula pentru h_n în funcţie de h, $n \in \mathbb{N}$.

Cum $h_1 = \frac{1}{2} h$, $h_2 = \frac{1}{3} h$, $h_3 = \frac{1}{4} h$, $h_4 = \frac{1}{5} h$, presupunem că:

$$(15)\quad h_n = \frac{1}{n+1} h,\ n \in \mathbb{N}.$$

6) Demonstrăm propoziţia (15) prin inducţie matematică.

Etapa de verificare: Pentru $n=1$ propoziţia $h_1 = \frac{1}{2} h$ este adevărată.

Etapa de demonstraţie: Presupunem că propoziţia (15) este adevărată. Vrem să arătăm că $h_{n+1} = \frac{1}{n+2} h$, $n \in \mathbb{N}$. Din (14) pentru $i = n+1$ şi $k = n+2$ şi din ipoteza de inducţie rezultă că $h_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} h_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} h = \frac{1}{n+2} h$, ceea ce trebuia dovedit.

Verificarea şi demonstraţia fiind efectuate, rezultă că propoziţia (15) este adevărată.

Metoda a II-a:

5') Calculăm h_n în funcţie de h_{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

Din (14), pentru $i = n$ şi $k = n+1$ obţinem formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $h_n = \dfrac{n}{n+1} h_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $h_0 > 0$.

6') Calculăm h_n în funcţie de h_0, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pornind de la formula de recurenţă ce caracterizează şirul $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem:

$h_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \dfrac{i}{i+1}\right) h = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n-2}{n-1} \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n}{n+1} h$, de unde $h_n = \dfrac{1}{n+1} h$, $n \in \mathbb{N}^*$, rezultat care nu trebuie demonstrat prin inducţie matematică.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} h = 0$.

f) $h_n^2 < h_{n-1} \cdot h_{n+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{h}{n+1}\right)^2 < \dfrac{h}{n} \cdot \dfrac{h}{n+2} \,\Big|: h^2$, $h^2 > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$, ceea ce este adevărat.

g) $s_n = A_{ABB_nA_n} = \dfrac{(AB + A_nB_n) \cdot A_nE_n}{2} = (a + l_n) \cdot h_n \cdot \dfrac{1}{2} = \left(a + \dfrac{na+b}{n+1}\right) \cdot \dfrac{1}{n+1} h \cdot \dfrac{1}{2} =$

$= \dfrac{na + a + na + b}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{(2n+1)a + b}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{h}{2}$.

(16) $\quad s_n = \dfrac{(2n+1)a + b}{(n+1)^2} \cdot \dfrac{h}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia (16) nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece s_n s-a calculat folosind propoziţiile (13) şi (15), demonstrate la a) şi d).

h) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[(2n+1)a + b\right] \cdot h}{2(n+1)^2} = 0$.

i) $t_n = A_{CDA_nB_n} = A_{ABCD} - A_{ABB_nA_n} = s_0 - s_n$, de unde:

$$(17)\quad t_n=\frac{(a+b)h}{2}-\frac{(2n+1)a+b}{(n+1)^2}\cdot\frac{h}{2},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Propoziţia (17) nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece t_n s-a calculat folosind propoziţia (16).

j) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(a+b)h}{2}-\frac{(2n+1)a+b}{(n+1)^2}\cdot\frac{h}{2}\right]=\frac{(a+b)h}{2}.$

k) $v_n=A_{A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}}=A_{ABB_nA_n}-A_{ABB_{n+1}A_{n+1}}=s_n-s_{n+1}=$

$$=\frac{(2n+1)a+b}{(n+1)^2}\cdot\frac{h}{2}-\frac{(2n+3)a+b}{(n+2)^2}\cdot\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{(2na+a+b)(n^2+4n+4)-(2na+3a+b)(n^2+2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{2n^2a+4na+2nb+a+3b}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{(2n^2+4n+1)a+(2n+3)b}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{h}{2}.$$

$$(18)\quad v_n=\frac{(2n^2+4n+1)a+(2n+3)b}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{h}{2},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Propoziţia (18) nu trebuie demonstrată prin inducţie matematică, deoarece v_n s-a calculat folosind propoziţia (16).

l) $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[(2n^2+4n+1)a+(2n+3)b\right]h}{2(n+1)^2(n+2)^2}=0.$