REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

APRILIE 2015

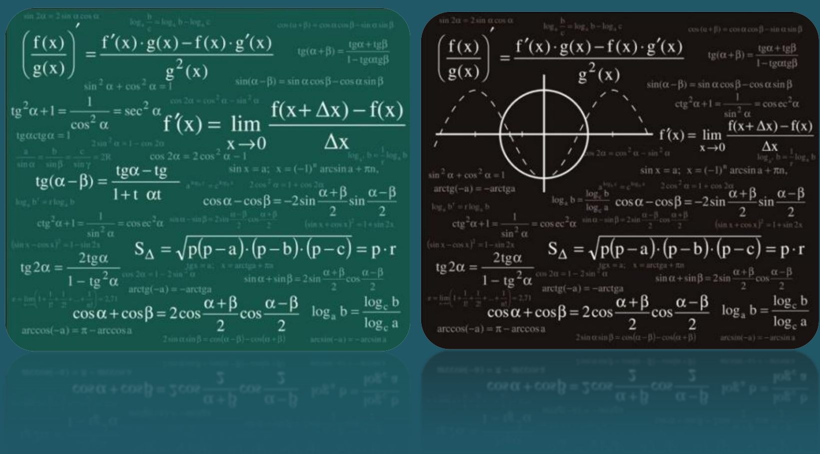
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

Articole:

1.Some problems and solutions from Octogon Mathematical Magazine

by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania
and
Neculai Stanciu, Buzău, Romania

PP.21173. Denote S_n the sum of the first n terms of an arithmetical progression. Prove that

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{S_{2k-1}}{2k-1}\right)=S_m.$$

Solution. Let r be the ratio of progression, so $a_i=a_1+(i-1)r$. We have:

$$S_{2k-1}=\sum_{i=1}^{2k-1}(a_1+(i-1)r)=(2k-1)a_1+r\sum_{i=1}^{2k-1}(i-1)=(2k-1)a_1+\frac{(2k-2)(2k-1)}{2}\cdot r=$$
$$=(2k-1)a_1+(k-1)(2k-1)r.$$

Yields that $\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{S_{2k-1}}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n-1}(a_1+(k-1)r)=(2n-1)a_1+(n-1)(2n-1)r$, therefore

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{S_{2k-1}}{2k-1}\right)=\sum_{n=1}^{m}(a_1+(n-1)r)=\sum_{n=1}^{m}a_n=S_m,$$ and we are done.

PP.21174. Prove that

1) $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9=\left(\underbrace{66...6}_{n-1}\right)^2$; 2) $\underbrace{11...1}_{2n}=\underbrace{22...2}_{n}+\left(\underbrace{33...3}_{n}\right)^2$ (correction).

Solution. We denote $\underbrace{11...1}_{a}=a$. We have:

1) $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9=\left(\underbrace{66...6}_{n-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4a\cdot 10^n+8a+1=(6a+1)^2 \Leftrightarrow 4a\cdot 10^n+8a=36a^2+12a$

$\Leftrightarrow 10^n+2=9a+3 \Leftrightarrow 1\underbrace{00...0}_{n-1}2=\underbrace{99...9}_{n}+3$, which is true.

2) $\underbrace{11...1}_{2n}=\underbrace{22...2}_{n}+\left(\underbrace{33...3}_{n}\right)^2 \Leftrightarrow a\cdot 10^n+a=2a+9a^2$

$\Leftrightarrow 10^n+1=9a+2 \Leftrightarrow 1\underbrace{00...0}_{n}=\underbrace{99...9}_{n}+1$, evidently true.

The proof is complete.

PP.21178. The real numbers $a_1 < a_2 < ... < a_n$ are in arithmetical progression if and only if and only if $(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 + ... + (a_n - a_{n-1})^2 = \frac{(a_n - a_1)^2}{n-1}$.

Solution. $''\Rightarrow''$ If $a_1, a_2, ..., a_n$ are in arithmetical progression with the ratio r we have

$(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 + ... + (a_n - a_{n-1})^2 = \frac{(a_n - a_1)^2}{n-1} \Leftrightarrow (n-1)r^2 = \frac{(n-1)^2 r^2}{n-1}$, true.

$''\Leftarrow''$ We suppose that $(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 + ... + (a_n - a_{n-1})^2 = \frac{(a_n - a_1)^2}{n-1}$ is true.

For $n = 3$, we obtain:

$$(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 = \frac{(a_3 - a_1)^2}{2}$$

$\Leftrightarrow 2a_1^2 + 2a_2^2 - 4a_1a_2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - 4a_2a_3 = a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 4a_2^2 + a_3^2 - 4a_1a_2 + 2a_1a_3 - 4a_2a_3 = 0$

$\Leftrightarrow (a_1 - 2a_2 + a_3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2a_2 = a_1 + a_3$, so a_1, a_2, a_3 are in in arithmetical progression and let r be the ratio.

We suppose that $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ are in arithmetical progression. Denoting $a_n - a_1 = x$, we obtain successively:

$$(n-2)r^2 + \left(x - (n-2)r\right)^2 = \frac{x^2}{n-1}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(n-1)rx + (n-1)^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - (n-1)r\right)^2 = 0$,

So $a_n = a_1 + (n-1)r$, i.e. $a_1, a_2, ..., a_n$ are in arithmetical progression, and the proof is complete.

PP.21180. Let $a_1 < a_2 < ... < a_n$ be real numbers. Prove that:

$\div a_1, a_2, ..., a_n$ are in arithmetical progression if and only if:

$$\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + ... + \frac{1}{a_n - a_{n-1}} = \frac{(n-1)^2}{a_n - a_1}.$$

Solution.

$''\Rightarrow''$ If $a_1, a_2, ..., a_n$ are in arithmetical progression with the ratio r, then:

$a_2 - a_1 = r, ..., a_n - a_{n-1} = r, a_n - a_1 = (n-1)r$ so the relation to prove becomes

$\frac{n-1}{r} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)r}$, true.

$''\Leftarrow''$ We assume that the relation from the statement is true. For $n = 3$, we obtain:

$\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} = \frac{4}{a_3 - a_1} \Leftrightarrow (a_1 - 2a_2 + a_3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2a_2 = a_1 + a_3$, so

a_1, a_2, a_3 are in arithmetical progression.

We assume that $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ are in arithmetical progression with the ratio r. We have:

$$\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+...+\frac{1}{a_n-a_{n-1}}=\frac{(n-1)^2}{a_n-a_1}\Leftrightarrow\frac{n-2}{r}+\frac{1}{a_n-a_1-(n-2)r}=\frac{(n-1)^2}{a_n-a_1}.$$

Denoting $y=a_n-a_1$, after some algebra we have:

$\frac{n-2}{r}+\frac{1}{y-(n-2)r}=\frac{(n-1)^2}{y}\Leftrightarrow[y-(n-1)r]^2=0$, so $y=(n-1)r$, i.e. $a_n=a_1+(n-1)r$. Therefore, by mathematical induction we deduce that $a_1,a_2,...,a_n$ are in arithmetical progression, and the proof is complete.

PP.21194. Let $a_1,a_2,...,a_{n+1}\in R^*$ be an arithmetical progression.

Prove that: $\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)=$

$=\frac{2a_n}{a_1a_{n-1}a_{n+1}}$ for all $n\in N$, $n\geq 3$.

Solution. Since, if denote by r the ratio of the given progression, we have:

$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$ etc., yields:

$$\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{(n-2)r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{nr}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{(n-2)r}\cdot\frac{a_{n-1}-a_1}{a_1a_{n-1}}+\frac{1}{nr}\cdot\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=$$

$=\frac{1}{(n-2)r}\cdot\frac{(n-2)r}{a_1a_{n-1}}+\frac{1}{nr}\cdot\frac{nr}{a_1a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n+1}}=\frac{2a_n}{a_1a_{n-1}a_{n+1}}$, and we are done.

PP.21199. If $a,b,c\in R$, then $\sum(a-b)(1+bc)(1+ca)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

Solution. We have: $(a-b)(1+bc)(1+ca)=(a+abc-b-b^2c)(1+ca)=$

$a+abc-b-b^2c+a^2c+a^2bc2-abc-ab^2c^2=a-b+a^2c-b^2c+a^2bc^2-ab^2c^2$.

Then, $\sum(a-b)(1+bc)(1+ca)=\sum a-\sum a+\sum a^2b-\sum ab^2+\sum a^2b^2c-\sum a^2b^2c=$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)=$

$=(a-b)(ab-ac-bc+c^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$, and the proof is complete.

PP.21203. If $x, y > 0$, then $\frac{7}{4} + \frac{xy}{(x+y)^2} \geq \frac{\sqrt{2}(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 1 + \frac{4xy}{(x+y)^2}$.

Solution 1. Because we have:
$\left(\sqrt{2(x^2+y^2)} - (x+y)\right)\left(\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y\right) = (x-y)^2$, thus the inequality from the left is written successively:

$$2 - \frac{2(x+y)}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \geq \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)} - (x+y)}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \geq \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}\left(\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y\right)} \geq \frac{(x-y)^2}{4(x+y)^2}.$$

If $x = y$ we have equality; if $x \neq y$ it remains to show that:

$$8(x+y)^2 \geq 2(x^2+y^2) + (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 16xy \geq (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)} \qquad (1)$$

Using AM-QM inequality $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ we have that:

$$6x^2 + 6y^2 + 16xy \geq 2(x^2+y^2) = \sqrt{2(x^2+y^2)} \cdot \sqrt{2(x^2+y^2)} \geq (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

The right inequality becomes:

$$2 - \frac{2(x+y)}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \leq 1 - \frac{4xy}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \frac{2(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}\left(\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y\right)} \leq \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}.$$

If $x = y$ we have equality; if $x \neq y$ it remains to show that:

$$2(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) + (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow (x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq 4xy \qquad (2)$$

With AM-GM inequality we deduce that:

$(x+y)\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{2 \cdot 2xy} = 4xy$, so (2) is true.

Solution 2. We denote $\frac{x}{y} = t$. The first inequality squaring becomes:

$$\frac{49}{16} + \frac{t^2}{(t+1)^4} + \frac{7t}{2(t+1)^2} \geq \frac{2(t+1)^2}{t^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 49(t^2+1)(t+1)^4 + 16t^2(t^2+1) + 56t(t+1)^2(t^2+1) \geq 32(t+1)^6$$

$$\Leftrightarrow 17t^6 + 60t^5 - 9t^4 - 136t^3 - 9t^2 + 60t + 17 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(17t^4 + 94t^3 + 162t^2 + 94t + 17) \geq 0$, true for $t > 0$.

We proceed analogous with the second inequality:

$$\frac{\sqrt{2}(t+1)}{\sqrt{t^2+1}} \geq 1 + \frac{4t}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \frac{2(t+1)^2}{t^2+1} \geq 1 + \frac{16t^2}{(t+1)^4} + \frac{8t}{(t+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(t+1)^6 \geq (t+1)^4(t^2+1) + 16t^2(t^2+1) + 8t(t^2+1)(t+1)^2$$

$\Leftrightarrow t^6 - 9t^4 + 16t^3 - 9t^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^4(t^2+4t+1) \geq 0$, true.

The proof is complete.

PP.21204. If $x, y > 0$, then: $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{2xy}{(x+y)^2}\right)^2$.

Solution. Using PP.21203, we obtain:

$$\frac{2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{\sqrt{2}(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 1 + \frac{4xy}{(x+y)^2}, \text{ i.e.}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{1}{2} + \frac{2xy}{(x+y)^2}$$, equivalent with the inequality from the statement.

PP.21209. If $a_k > 0$ $(k = 1,2,...,n)$, then $\sum_{cyclic} \frac{a_1^2}{a_1 + 2a_2 + ... + na_n} \geq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution. By the inequality of Harald Bergström and the fact $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, we obtain:

$$\sum_{cyclic} \frac{a_1^2}{a_1 + 2a_2 + ... + na_n} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{(1+2+...+n)\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

and the proof is complete.

PP.21213. In all triangle ABC holds $\sum \frac{m_a m_b}{m_a + m_b - m_c} \geq m_a + m_b + m_c$.

Solution. We have:

$$\sum \frac{m_a m_b}{m_a + m_b - m_c} - \sum m_a = \sum \left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b - m_c} - \frac{m_a + m_b}{2} \right) =$$

$$= \sum \frac{m_a m_c - m_a^2 + m_b m_c - m_b^2}{2(m_a + m_b - m_c)} = \sum \left(\frac{m_a (m_c - m_a)}{2(m_a + m_b - m_c)} + \frac{m_b (m_c - m_b)}{2(m_a + m_b - m_c)} \right) =$$

$$= \sum \frac{m_a (m_c - m_a)}{2(m_a + \cancel{m}_b - m_c)} + \sum \frac{m_b (m_c - m_a)}{2(m_a + m_b - m_c)} == \sum \frac{m_a (m_c - m_a)}{2(m_a + \cancel{m}_b - m_c)} + \sum \frac{m_c (m_a - m_c)}{2(m_b + m_c - m_a)} =$$

$$= \sum \left(\frac{m_a (m_c - m_a)}{2(m_a + m_b - m_c)} + \frac{m_c (m_a - m_c)}{2(m_b + m_c - m_a)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum (m_c - m_a) \cdot \frac{m_c^2 - m_a^2 - m_b (m_c - m_a)}{(m_a + m_b - m_c)(m_b + m_c - m_a)} =$$

$=\frac{1}{2}\sum\frac{(m_c-m_a)^2(m_c+m_a-m_b)}{(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)}\geq 0$, because the medians of an triangle can be the sides of an triangle, and we are done.

PP.21233. In all triangle ABC holds $\prod\left(1+ctg^2\frac{A}{2}\right)\leq\frac{1}{4}$.

Solution. The inequality from the enunciation is not true. For e.g if triangle ABC is equilateral we have $ctg\frac{A}{2}=\sqrt{3}$ and the given inequality becomes $4^3\leq\frac{1}{4}$, false.

We will prove that $\prod\left(1+ctg^2\frac{A}{2}\right)\geq 64$. Indeed by the item 2.42 from Bottema, i.e

$ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$ and by Hölder' s inequality follows that:

$$\prod\left(1+ctg^2\frac{A}{2}\right)\geq\left(1+\sqrt[3]{ctg^2\frac{A}{2}ctg^2\frac{B}{2}ctg^2\frac{C}{2}}\right)^3\geq\left(1+\sqrt[3]{27}\right)^3=64,$$

and we are done.

PP.21243. Let be $k\in N^*$, determine the sequence $(a_n)_{n\geq 1}$ for which

$\frac{k}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{k+1}{a_n}-\frac{k+1}{a_{n+1}}$ for all $n\in N^*$, when $a_1=k!a$ and $a>0$.

Solution. We denote $b_n=\frac{a_n}{a_1}$; the sequence $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfy the relation:

$$\frac{k}{b_1+b_2+...+b_n}=\frac{k+1}{b_n}-\frac{k+1}{b_{n+1}},\text{ with } b_1=1.$$

For $n=1$, we have $\frac{k}{1}=\frac{k+1}{1}-\frac{k+1}{b_2}$, so $b_2=k+1$.

For $n=2$, we have $\frac{k}{1+k+1}=\frac{k+1}{k+1}-\frac{k+1}{b_3}$, so $b_3=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

We prove by mathematical induction that: $b_n=\binom{k+n-1}{n-1}$.

First we prove that:

$$1+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+...+\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n}{n-1} \qquad (1)$$

For this we use well-known formula $\binom{m}{p}=\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-1}{p}$, so we deduce tha:

$\binom{k+2}{1}=1+\binom{k+1}{1}$

$$\binom{k+3}{2}=\binom{k+2}{1}+\binom{k+2}{2}$$
$$\binom{k+4}{3}=\binom{k+3}{2}+\binom{k+3}{3}$$
....
$$\binom{k+n}{n-1}=\binom{k+n-1}{n-2}+\binom{k+n-1}{n-1}.$$

Adding up we obtain (1).

We deduce that:

$$\frac{k}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{k+1}{b_n}-\frac{k+1}{b_{n+1}}\Leftrightarrow\frac{k}{1+\binom{k+1}{1}+\ldots+\binom{k+n-1}{n-1}}=\frac{k+1}{\binom{k+n-1}{n-1}}-\frac{k+1}{b_{n+1}}$$

$\Leftrightarrow\dfrac{k+1}{b_{n+1}}=\dfrac{k+1}{\binom{k+n-1}{n-1}}-\dfrac{k}{\binom{k+n}{n-1}}$, and because:

$\binom{k+n}{n-1}=\dfrac{k+n}{k+1}\binom{k+n-1}{n-1}$, follows that:

$$\frac{k+1}{b_{n+1}}=\frac{k+1}{\binom{k+n-1}{n-1}}-\frac{k(k+1)}{(k+n)\binom{k+n-1}{n-1}}\Leftrightarrow\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{n}{(k+n)\binom{k+n-1}{n-1}}.$$

Therefore, $b_{n+1}=\dfrac{k+n}{n}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n}{n}$, and by mathematical induction we prove that for any n, $b_n=\binom{k+n-1}{n-1}$.

Returning to the sequence $(a_n)_{n\geq1}$ yields that:

$$a_n=k!a\cdot\binom{k+n-1}{n-1}=a\cdot\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}.$$ The proof is complete.

2.Ecuații cu variabile separabile – Aplicație pentru o transformare politropă

Prof. Boer Elena Milena, Școala Gimnaziala Vulcan, Brașov

Ecuațiile cu variabile separabile sunt acele ecuații diferențiabile pentru care funcția din membrul drept are forma:

$$f\ (x,\ y(x))\ =\ g(x)h(\ y)\ ,$$

Astfel: $$y'(x)=\frac{dy}{dx}=f(x,y(x))=g(x)h(y)\,.$$

După separarea variabilelor se obține soluția următoare:

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx\Rightarrow\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{h(s)}=\int_{x_0}^{x}g(s)ds\Rightarrow G(y(x))-G(y_0)=\int_{x_0}^{x}g(s)ds\Rightarrow$$

$$y(x)=G^{-1}\left(G(y_0)+\int_{x_0}^{x}g(s)ds\right).$$

Ca aplicație voi prezenta o transformare termodinamică fundamentală și anume transformarea adiabatică care reprezintă un caz particular de transformare politropă.

În cazul transformării politrope capacitatea calorică $C=\frac{\delta Q}{dT}=\text{const.}$ (1)

Pentru un sistem simplu pe baza principiului întâi al termodinamicii putem să scriem că $\mathrm{C}\ dT\ =\ dU\ +\ \mathrm{A}\ da$, unde T este temperatura, U este energia internă, a este un parametru extern (exemplu volumul), A este parametrul de forță conjugat cu parametrul extern a (exemplu presiunea).

Ținând cont de ecuația calorică de stare $U = U(a,T)$ și de relația $C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_a$, ($C_a$ - capacitate calorică referitoare la transformarea în care parametrul *a* este menținut constant) obținem:

$$\left(C - C_a\right) dT = \left[A + \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T\right] da \qquad (2)$$

Dacă $C \neq C_a$ vom avea: $dT + \frac{C_A - C_a}{C_a - C}\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0$ (3)

Aici am ținut cont de relația Robert-Mayer: $C_A - C_a = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T + A\right]\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A$.

Conform ecuației termice de stare: $T = T(A, a)$

Prin urmare: $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da$.

Atunci relația (3) poate fi scrisă sub forma: $\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \frac{C_A - C}{C_a - C}\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0$ (4)

Să particularizăm relația (4) pentru un gaz ideal:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \frac{C_p - C}{C_V - C}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0 \qquad (5)$$

Introducem indicile politrop: $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$ (6)

Derivatele din relația (5) pot fi obținute cu ușurință din ecuația Clapeyron-Mendeleev:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V}{R}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{p}{R}$$

Rezultă: $V\,dp + np\,dV = 0$

Sau: $\frac{dp}{p} = -n\frac{dV}{V}$

Integrând ecuația de mai sus obținem: $\int \frac{dp}{p} = -n\int \frac{dV}{V} + C_1$, unde C_1 este o constantă.

Astfel, $\ln p + n\ln V = C_1 \Rightarrow \ln(pV^n) = C_1$

Am obținut astfel ecuația transformării politrope: $pV^n = \text{const.}$ (7)

În cazul transformării adiabatice $C = 0$, deci ecuația transformării va fi dată de

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \tag{8}$$

unde coeficientul $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ se numește *exponent adiabatic*.

Ecuația (8) este binecunoscuta ecuație Poisson pentru transformarea adiabatică.

Bibliografie:

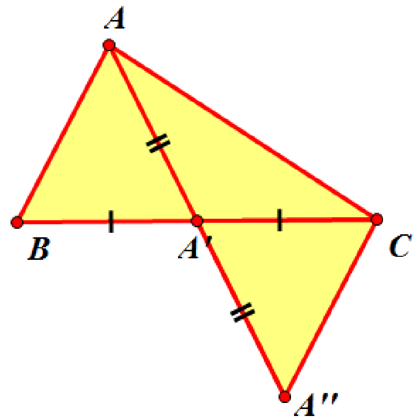
1. Marin, M. și Marinescu C., *Ecuatii diferentiale si integrale,* Editura Tehnica, Bucuresti, 1996.
2. Șerban Țițeica - Termodinamica, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania 1982.

3. INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN TRIUNGHI

Prof. Andrei Dobre
C.N. "Nichita Stănescu" Ploieşti

1. *Să se demonstreze că, o mediană a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor alăturate cu ea.*

Soluţie:



Fie triunghiul ABC şi mediana AA' ; prelungim aceasta mediană cu o lungime $[A'A'']\equiv[AA']$
Se demonstrează, uşor, congruenţa triunghiurilor *ABA' si CA'A''* (cazul de congruenta , latura , unghi latura), de unde rezulta $[AB] \equiv [CA'']$.

În triunghiul *ACA''* avem $[AA''] < [AC] + [CA'']$ şi, cum $[A'A''] \equiv [AA'']$, rezultă că $AA' < \frac{AB+AC}{2}$

2. *Fie triunghiul ABC, in care* $m\angle(BAC) > m\angle(ABC)+m\angle(ACB)$ *şi fie D mijlocul segmentului* $[BC]$*.Să se arate că* $AD < \frac{BC}{2}$.

Soluţie:

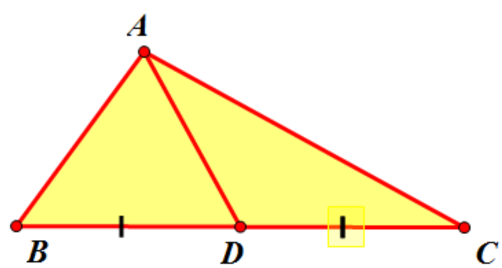


fig.

$Ávem\, m\angle(BAC) = m\angle(BAD)+m\angle(DAC) >$
$> m\angle(ABC)+m\angle(ACB), din\, ipoteză$

De aici rezultă ca

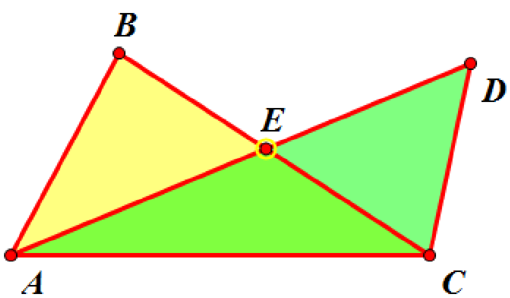
$m\angle(BAD) > m\angle(ABC), de\, unde\, BD \geq AD\, sau$
$m\angle(DAC) > m\angle(ACB), de\, unde\, DC > AD.$
$Din\, BD > AD\, şi\, DC > AD$, adunându-le,

se obţine $AD < \frac{BC}{2}$

3.Două triunghiuri sunt asezate astfel încât au o latură comună, iar alte două laturi se intersectează.Să se demonstreze că, suma lungimilor laturilor care se intersectează este mai mare decât suma lungimilor laturilor care nu se intersectează.

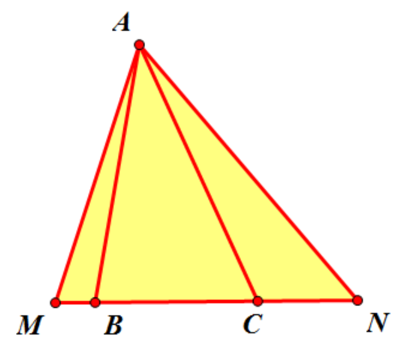
Soluţie:

Fie AC latura comuna triunghiurilor ABC si ADC şi, fie E punctul de intersecţie al laturilor AD si BC.Din triunghiurile AEB si CDE, rezultă, respectiv, că $AE + BE > AB$ şi $EC + ED > CD$, care, adunate membru cu membru, şi ţinând seama ca $AE + ED = AD$, iar $BE + EC = BC$, conduc la $AD + BC > AB + CD$.



4.Fie triunghiul ABC şi M,N două puncte astfel încât $B \in (MC)$ *şi* $C \in (BN)$. *Să se demonstreze că:* $m(\angle MAN) < m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$.

Soluţie:



fi

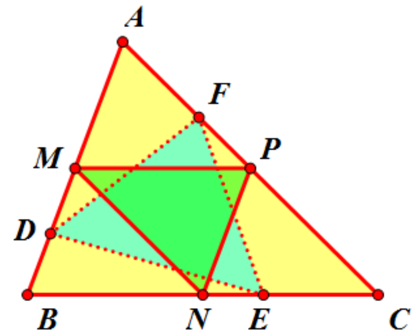
Fie triunghiul ABC şi punctele M şi $N \in BC$, astfel încât $B \in (MC)$ şi $C \in (BN)$

În această situaţie $\angle ABC$ este unghi exterior triunghiului ABM, $\angle ACB$ este unghi exterior triunghiului ACN.

Conform teoremei unghiului exterior, $m(\angle ABC) > m(\angle MAB)$, $m(\angle ACB) > m(\angle NAC)$.
Deci: $m(\angle MAN) = m(\angle MAB) + m(\angle BAC) + m(\angle CAN) <$
$< m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$

5.(Problema 0.110 G.M. nr.10/1980): În triunghiul ABC notăm cu M,N,P mijloacele laturilor (AB), (BC), (CA) *şi fie* $D \in [MB]$, $E \in [NC]$, *şi* $F \in [PA]$. *Să se demonstreze că:* $S_{[DEF]} \geq S_{[MPN]}$.

Soluţie:



Fie triunghiul ABC şi M,N,P mijloacele laturilor (AB), (BC), (CA), iar $D \in [MB]$, $E \in [NC]$, şi $F \in [PA]$ (fig.II.5.1). Considerăm $AD = xAB$; $BE = yBC$; $CF = zAC$, evident $x, y, z \in [1/2, 1]$.

$$\frac{S_{[ADF]}}{S_{[ABC]}} = \frac{(1/2)AD \cdot AF \cdot \sin(\angle A)}{(1/2)AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)} = \frac{AD \cdot AF}{AB \cdot AC} = x(1-y).$$

În mod analog: $\frac{S_{[BED]}}{S_{[ABC]}} = y(1-x)$, iar $\frac{S_{[CFE]}}{S_{[ABC]}} = z(1-y)$.

Cum $x, y, z \in [1/2, 1]$ avem:

$(x-1/2)(y-1/2)+(y-1/2)(z-1/2)\cdot(x-1/2) \geq 0$

ceea ce implică:

$xy-(1/2)(x+y)+1/4+yz-(1/2)(y+z)+1/4+zx-(1/2)(z+x)+1/4 \geq 0$ şi, deci $xy+yz+zx-(1/2)[(x+y)+(y+z)+(z+x)]+3/4 \geq 0$, de unde rezultă: $xy+yz+zx-(x+y+z)+3/4 \geq 0$ şi prin urmare $(x+y+z)-(xy+yz+zx) \leq 3/4$. Notăm cu $\alpha = (S_{[ADE]}+S_{[BED]}+S_{[CFE]})/S_{[ABC]}$, obţinem: $\alpha = x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) = (x+y+z)-$ $-(xy+yz+zx)$ şi deci $\alpha \leq 3/4$.

Pe de altă parte,

$(S_{[AMP]}+S_{[BMN]}+S_{[CPN]})/S_{[ABC]} =$

$$\frac{AM \cdot AP \cdot \sin(\angle A)}{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)} + \frac{BM \cdot BN \cdot \sin(\angle B)}{BA \cdot BC \cdot \sin(\angle B)} + \frac{CP \cdot CN \cdot \sin(\angle C)}{CA \cdot CB \cdot \sin(\angle C)} =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ şi cum $S_{[MPN]} = (1/4)S_{[ABC]}$, iar $S_{[DEF]} = (1-\alpha)S_{[ABC]}$, având în vedere cele de mai sus, $S_{[DEF]} \geq S_{[MNP]}$.

4.Câteva probleme interesante de clasa a VI-a

Profesor Ivănuş Nicolae

Şcoala Gimnazială, sat Mologeşti, comuna Laloşu

Problema 1: Se dă o balanţă. Care este numărul minim de greutăţi necesare pentru a putea cântări orice obiect care are 1,2,3,...,39 kg.

Soluţie: Orice număr natural poate fi scris ca sumă a puterilor lui 2 mai mici decât el, deci răspunsul imediat ar fi 6 greutaţi (1,2,4,8,16,32) . Fiind însă vorba despre o balanţă, greutăţile se pot aşeza şi pe celălalt taler, altfel spus se poate folosi şi semnul minus. Deci sunt suficiente puterile lui 3, în cazul lui 39 primele 4 puteri (1,3,9,27). Ex: 38=27+3+9-1.

Problema 2: Se ştie că fracţia $\frac{3n+2}{7n+3}$, cu n număr natural impar, este reductibilă. Aflaţi ultima cifră a numărului n.

Soluţie: Fie d=(3n+2,7n+3) ,

$d/3n+2 \Rightarrow d/21n+14$,

$d/7n+3 \Rightarrow d/21n+9$; $d/5$, fracţia este reductibilă $\Rightarrow$ d=5,

5/3n+2 $\Rightarrow$u(n) $\in \{1,6\}$,

/7n+3 $\Rightarrow$ u(n) $\in \{1,6\}$,

n natural impar $\Rightarrow$ u(n) =1.

Problema 3: Fie numerele $\overline{ab}$ şi $\overline{cd}$.

a) Arătaţi că nu există astfel de numere care verifică $\overline{ab}+\overline{cd}=b^a+d^c+1$.

b)Daţi un exemplu de două numere (de această formă), astfel încât $\overline{ab}+\overline{cd}=b^a+d^c$.

Soluţie:

a) -Dacă b şi d pare: $\overline{ab}$ par, $\overline{cd}$ par$\Rightarrow \overline{ab}+\overline{cd}$ par; b^a par, d^c par$\Rightarrow b^a+d^c+1$impar;

-Dacă b şi d impare: $\overline{ab}$ impar, $\overline{cd}$ impar$\Rightarrow \overline{ab}+\overline{cd}$ par; b^a impar, d^c impar$\Rightarrow b^a+d^c+1$impar;

-Dacă b par şi d impar: $\overline{ab}$ par, $\overline{cd}$ impar$\Rightarrow \overline{ab}+\overline{cd}$ impar; b^a par, d^c impar$\Rightarrow b^a+d^c+1$par;

-Dacă b impar şi d par: $\overline{ab}$ impar, $\overline{cd}$ par $\Rightarrow \overline{ab}+\overline{cd}$ impar; b^a impar, d^c par $\Rightarrow b^a+d^c+1$ par.

b) Ex: 25 şi 25; 15 şi 26.

Problema 4: Se dau, în jurul unui punct, unghiurile ∢AOB, ∢BOC, ∢COD, ∢DOE şi ∢EOA, adiacente două câte două, cu proprietăţile: m(∢DOE) = $\frac{1}{2}\cdot$m(∢AOB), m(∢COD) = $\frac{3}{2}$m(∢AOB), m(∢EOA) = $\frac{1}{2}\cdot$m(∢DOE), m(∢BOC) =$11\cdot$m(∢EOA).

a) Arătaţi că unghiul ∢COD este drept.

b) Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ∢AOB şi ∢DOE.

Soluţie:

a) m(∢DOE) = $\frac{1}{2}\cdot$m(∢AOB), m(∢COD) = $\frac{3}{2}\cdot$m(∢AOB), m(∢EOA) = $\frac{1}{4}\cdot$m(∢AOB),

m(∢BOC) = $\frac{11}{4}\cdot$m(∢AOB),

m(∢AOB) + m(∢BOC) + m(∢COD) + m(∢DOE) + m(∢EOA) = 360°,

După calcule m(∢AOB) = $60^\circ \Rightarrow$ m(∢COD) = 90°.

b) Măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor ∢AOB şi ∢DOE = m(∢AOB) : 2 + m(∢EOA) + m(∢DOE) : 2 = 60°.