REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

IUNIE 2015

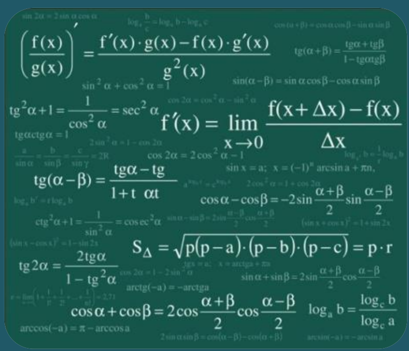
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE

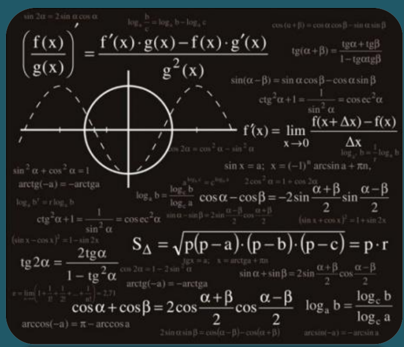
REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro





Articole:

1. Despre inegalitatea lui Nesbitt … pag.2
   D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu
2. Relații metrice pentru cercurile exînscrise unui tringhi ... pag.7
   Cristea Maria
3. O familie de inegalități .. pag.11
   Marin Chirciu, Daniel Văcaru
4. Câteva probleme de trigonometrie … pag.14
   Țâmpu Andreea Iuliana

1.Despre inegalitatea lui Nesbitt

D.M. Bătineţu-Giurgiu[1] şi Neculai Stanciu[2]

Ce facem? Prezentăm o problemă[3] de gândire matematică confruntată cu două tendințe complementare: sistematizarea şi descoperirea.
Cum facem? Solicităm inspirația[4], imaginația, intuiția, logica şi raționamentul.
Cât facem? Atât cât să contribuim la încolțirea şi înmugurirea dezvoltării gustului creativității în domeniul matematicii.

Remarca 1. În cercurile de matematică şi la perfecţionările didactice se desfăşoară o activitate liberă. Aici se pot experimenta diferite strategii, tehnici, metode şi procedee de stimulare a imaginaţiei. Concluzionăm prin a sublinia că un mod de stimulare a creativităţii elevilor la matematică este să se dea probleme având multiple soluţii. Exemplificăm aceasta prin:

O generalizare – inegalitatea lui Nesbitt

Credem că în limbajul matematic se justifică utilizarea termenului **"o generalizare"** în loc de **"generalizarea"** problemei. În acest sens, considerăm că una dintre cele mai inspirate forme de clarificare a afirmaţiei "o generalizare" rămâne următorul exemplu clasic: "Dacă vârfurile unui hexagon sunt pe un cerc, cele trei puncte în care se întâlnesc perechile de laturi opuse sunt coliniare"(Teorema lui *Pascal*). Şi această teoremă s-a tot generalizat, în cazul în care vârfurile hexagonului se află pe o elipsă sau hiperbolă sau parabolă sau pe o conică dată analitic printr-o ecuaţie de gradul al doilea (conică "oarecare"). Problema generalizării s-a încheiat arătându-se că dacă şase puncte nu sunt pe aceeaşi conică, atunci cele trei puncte nu mai sunt coliniare. În momentul acesta focul a fost aprins, urmează doar să fie întreţinut şi de aceea, în cele ce urmează, vom rezolva problema generalizării inegalităţii lui *Nesbitt*.

Inegalitatea lui Nesbitt pentru două variabile:

Dacă $x_1, x_2 \in R_+^*$, *atunci:* $A(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\ge 2$, (Caz particular - Didactica Matematică 2012 – vezi [6])

1.*Dacă* $a,b,x_1,x_2\in R_+^*, X_2=x_1+x_2$ *şi* $aX_2 > b\max\{x_1,x_2\}$, *atunci:*

$$B(x_1,x_2)=\frac{x_1}{aX_2-bx_1}+\frac{x_2}{aX_2-bx_2}\ge\frac{2}{2a-b},$$ (Didactica Matematică 2012 – vezi [6]).

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional ''Matei Basarab'', Bucureşti
[2] Profesor, Şc. Gimnazială ''George Emil Palade'', Buzău
[3] Primul care a întrebuințat acest termen a fost Democrit.Ce este problema? Sarcină nerezolvată care așteaptă soluționarea, întrebare propusă, obstacol, barieră, subiect de controversă.Problematizarea ne arată că omul întrebător se mişcă asimptotic spre adevăr.
[4] Stare irațională a spontaneității.

Inegalitatea lui Nesbitt pentru trei variabile:

Dacă $x_1, x_2, x_3 \in R_+^*$, *atunci:* $C(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geq \frac{3}{2}$, (Nesbitt - 1903 – vezi [10]).

2. *Dacă* $a, b, x_1, x_2, x_3 \in R_+^*$, *atunci:*

$$D(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{ax_2+bx_3} + \frac{x_2}{ax_3+bx_1} + \frac{x_3}{ax_1+bx_2} \geq \frac{3}{a+b}$$, (Braşov 2011 – vezi [3]).

3. *Dacă* $a_k, b_k, x_k \in R_+^*, k = \overline{1,3}$ *şi* $a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 = t$, *atunci:*

$$E(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{a_1x_2+b_1x_3} + \frac{x_2}{a_2x_3+b_2x_1} + \frac{x_3}{a_3x_1+b_3x_2} \geq \frac{3}{t}$$, (Braşov 2011 – vezi [3]).

4. *Dacă* $a, b, x_1, x_2, x_3 \in R_+^*$, $x_1 + x_2 + x_3 = X_3$ *şi* $aX_3 > b\max\{x_1, x_2, x_3\}$, *atunci:*

$$F(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{aX_3-bx_1} + \frac{x_2}{aX_3-bx_2} + \frac{x_3}{aX_3-bx_3} \geq \frac{3}{3a-b}$$, (Braşov 2011 – vezi [3])

5. *Dacă* $a, b, x_1, x_2, x_3 \in R_+^*$, $x_1 + x_2 + x_3 = X_3$ *astfel încât* $aX_3 > b\max\{x_1, x_2, x_3\}$, *iar* $m, p \in [1, \infty)$ *atunci:*

$$G(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^m}{(aX_3-bx_1)^p} + \frac{x_2^m}{(aX_3-bx_2)^p} + \frac{x_3^m}{(aX_3-bx_3)^p} \geq \frac{3^{-m+p+1}}{(3a-b)^p} \cdot X_3^{m-p},$$

(Braşov 2011 – vezi [3]).

6. *Dacă* $a, b, x_1, x_2, x_3 \in R_+^*$, $x_1 + x_2 + x_3 = X_3$ *şi* $m \in R_+$, *atunci:*

$$H(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{(aX_3-bx_1)^m} + \frac{x_2}{(aX_3-bx_2)^m} + \frac{x_3}{(aX_3-bx_3)^m} \geq \frac{3^m}{(3a-b)^m \cdot X_3^{m-1}},$$

(Braşov 2011 – vezi [3])

7. *Dacă* $a, b, c, x, y, z \in R_+^*$, *atunci:*

$$I(x,y,z) = \frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} \geq \frac{(ax+by+cz)^2}{(a+b)xy+(b+c)yz+(c+a)zx} \geq$$

$$\geq \frac{3(abxy+bcyz+cazx)}{(a+b)xy+(b+c)yz+(c+a)zx}$$, (RMT -1/2012 – vezi [4]).

8. *Dacă* $a, b, x, y, z \in R_+^*$ *şi* $m \in R_+$, *atunci:*

$$J(x,y,z) = \frac{x^{m+1}}{(ay+bz)^{2m+1}} + \frac{y^{m+1}}{(az+bx)^{2m+1}} + \frac{z^{m+1}}{(ax+by)^{2m+1}} \geq \frac{3^{m+1}}{(a+b)^{2m+1}(x+y+z)^m},$$

(Rm.Sărat 2011 – vezi [2])

Inegalitatea lui Nesbitt pentru n variabile:

Dacă $x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, *atunci:* $(N_n)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X_n - x_k} \geq \frac{n}{n-1}$. (Cazul $n = 4$, SM, nr. VIII-2011 – vezi [11])

9. *Dacă* $n \in N^* - \{1,2\}, m, p \in [1, \infty), a, b, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, *şi* $aX_n > b \max_{1\leq k\leq n} x_k$, *atunci:* $K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n}{(aX_n - bx_k)^p} \geq \frac{n^{-m+p+1}}{(an-b)^p} \cdot X_n^{m-p}$, (Rm.Sărat 2011 – vezi [2]).

10. *Dacă* $a, b, x_k \in R_+^*, c, y_k \in R_+, \forall k = \overline{1,n}, n \in N^* - \{1\}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ *şi* $aX_n > b \max_{1\leq k\leq n} x_k, y_k \in \left[0, \frac{1}{n} X_n\right], \forall k = \overline{1,n}$ *şi* $m \in R_+$, *atunci:*

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{m+1}}{(aX_n - bx_k + cy_k)^{2m+1}} \geq \frac{n^{m+1}}{(an-b+c)^{2m+1} X_n^m},$$ (Rm.Sărat 2011 – vezi [2])

11. *Dacă* $n \in N^* - \{1,2\}, a \in R_+, b, c, d, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, *şi* $cX_n > d \max_{1\leq k\leq n} x_k$, *atunci:* $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \geq \frac{(an+b)\cdot n}{cn-d}$, (SM, nr. IX-2012 – vezi [5])

12. *Dacă* $a \in R_+, b, c, d, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, m \in [1, \infty)$ *şi* $cX_n^m > d \max_{1\leq k\leq n} x_k^m$, *atunci:* $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n^m - dx_k^m} \geq \frac{(an+b)n^m}{cn^m - d} X_n^{1-m}$, (G.Gheba-2012 – vezi [7])

13. *Dacă* $a, m \in R_+, b, c, d, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, p \in [1, \infty)$ *şi* $cX_n^m > d \max_{1\leq k\leq n} x_k^m$, *atunci:* $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{(cX_n^m - dx_k^m)^p} \geq \frac{(an+b)n^{mp}}{(cn^m - d)^p} X_n^{1-mp}$, (AMM - 11634 – vezi [8])

14. *Dacă* $n \in N^* - \{1\},\ a \in R_+,\ b, c, d, x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $m, p, r, s \in [1, \infty)$, *astfel încât* $cX_n^m > d \max_{1\leq k\leq n} x_k^m$, *atunci:*

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(aX_n^r + bx_k^r)^s}{(cX_n^m - dx_k^m)^p} \geq \frac{(an^r + b)^s}{(cn^m - d)^p} n^{mp-rs+1} X_n^{rs-mp},$$ (REOIM – vezi [9])

Victorie gustată din plin!

Problematizare[5]. Privarea de feed-back, reduce această temă de cercetare metodico-didactică la o prezentare fără receptare, şi fără eficiență, frustrant pentru toți partenerii.În acest sens propunem cititorilor euristica[6].
Notă. Tema expusă mai sus poate fi tratată cu succes în cadrul perfecţionării cadrelor didactice şi nu numai. Deşi generalizările prezentate au multiple soluţii (toate au cel puţin patru soluţii, iar pentru unele am găsit chiar şapte soluţii), de multe ori a trebuit să folosim „marche-arrièrre''- ul pentru a reveni din ''drumurile înfundate''.

Remarca 2. Cercetarea autentică pretinde informare completă şi reflecție - pentru a nu forța “uşi deschise”. Problemele prezentate trebuie să fie de tipul reproiectare-creativă, deoarece se solicită găsirea mai multor soluţii sau mai multe metode de rezolvare adică trebuie să reparcurgem drumul pe o altă cale pentru a obține acelaşi rezultat, sau altul mai bun, îmbunătățit sau optimizat.

Remarca 3. Se ţine de asemenea cont că trebuie conturate cât mai clar strategiile euristice cu cele algoritmice ca să trezească elevului nevoia de cunoaştere şi curiozitatea şi să-l motiveze în căutare. Deoarece, capacitatea de generalizare este indiciul unei gândiri independente şi creatoare, al unei bune formaţiuni intelectuale, propunem ca temă, cititorilor: să generalizeze unele inegalităţi întâlnite la disciplina matematică. Astfel, gândirea creatoare, inițiativa şi spiritul dumnevoastră de independență au şanse de afirmare. Succes! Gândirea generalizată în sfera simbolisticii numerale şi literale, a relațiilor cantitative şi spațiale, a obiectelor şi acțiunilor matematice este un privilegiu al matematicienilor (*V.A. Krutețki*). Ca însuşire psihică specifică gândirii matematicianului, generalizarea nu poate fi înțeleasă în afara contextului experienței anterioare.

Remarca 4. Pentru a deveni creativi, avem nevoie de idei şi intuiţii, care vin şi se dezvoltă prin exerciţiu. Ştim că nu tot ce am intenționat am reuşit să prezentăm, nu tot ce am prezentat se va studia, nu tot ce se va studia se va înțelege, se înțelege şi ce nu am prezentat, iar ceea ce se va înțelege nu depinde numai de noi ce devine. Încheiem prin a afirma că ne aflăm într-o lume a problemelor, adică a întrebărilor nesfârşite impuse de : nevoie, mirare, curiozitate şi de utilul permanent. Cercetați![7]

Bibliografie:

[1] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *O extindere şi o rafinare a inegalităţii lui Nesbitt*, Simpozion Rm. Sărat, 2011
[2] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Noi generalizări ale inegalității lui Nesbitt*, Simpozion Rm. Sărat 2011
[3] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Mihály Bencze, Neculai Stanciu, *New generalizations and new approaches for Nesbitt's inequality,* Simpozion Braşov, 2011

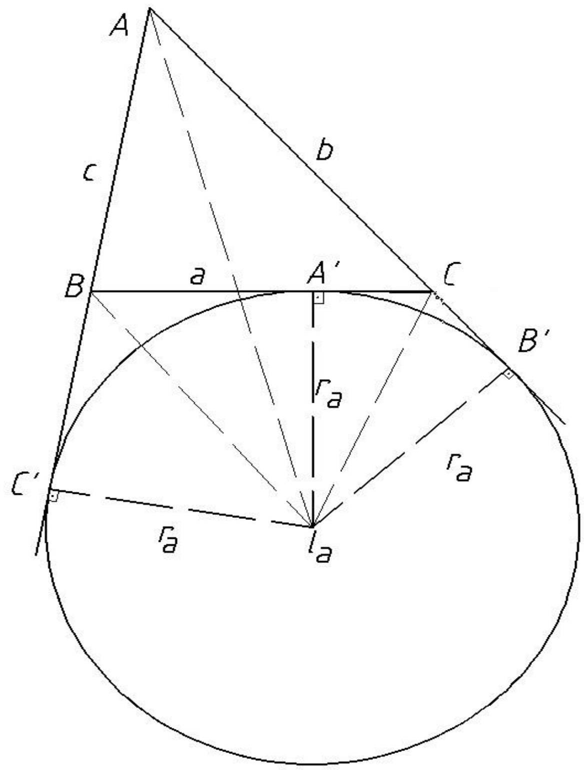
[5] Fiind un ghem de întrebări, omul problematizează, idealizează, absolutizează şi se îndoieşte, sceptic-elen sau metodic-cartezian.
[6] Căutarea şi descoperirea de fapte şi idei noi.
[7] Verbul “a cerceta” are ca înțeles primar faptul de a examina cu atenție, a observa, a controla, a studia, a consulta, a căuta, a întreba sau a iscodi.

[4] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *O extindere şi o rafinare a inegalităţii lui Nesbitt*, RMT, nr. 1/2012
[5] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Încă patru demonstraţii ale problemei L:155 din Sclipirea minţii nr. VII 2011*, Sclipirea Minţii nr. IX, 2012, pp.6-8
[6] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Inegalitatea lui Nesbitt*, Didactica Matematică, nr.1 / 2012
[7] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *A generalization of some remarkable inequalities*, Simpozion Buzău, 2012
[8] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Problem 11634*, The American MathematicalMonthly, Vol. 119, March 2012, p. 248
[9] D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, va apărea în Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, 2012
[10] A.M. Nesbitt, *Problem* 15114, Educational Times (2), 3 (1903), pp. 37-38.
[11] Titu Zvonaru, Neculai Stanciu, *Şase soluţii pentru problema L:155 din Sclipirea Minţii, nr. VII, 2011*, Sclipirea Minţii, nr. VIII, 2011, pp. 9-10.

2.Relaţii metrice pentru razele cercurilor exînscrise unui triunghi

Autor, prof. Cristea Maria
Şcoala Gimnazială Buznea, Iaşi

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relația:*
$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$, *unde* r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise,* p *semiperimetrul iar* S *aria triunghiului.*



Demonstraţie:

Metoda 1:

Bisectoarea interioară a unghiului A *se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului* B *în punctul* I_a *(figura de mai jos). Acest punct se află la egală distanță de dreptele* $AB, AC, BC.$ *Dacă* A', B', C' *sunt proiecțiile acestui punct pe* BC, AC *și respectiv* AB *avem* $I_aA' = I_aB' = I_aC' = r_a$.

Deci există un unic cerc de centru I_a *care trece prin punctele* A', B', C' *şi este tangent unei laturi a triunghiului* $([BC])$ *şi prelungirile celorlalte două* $([AB],[AC])$. *Pentru determinarea razei* r_a *a acestui cerc utilizăm egalitatea de arii* $S = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a}$ *sau* $S = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2}$ *sau* $S = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a$ *sau încă* $S = (p-a)r_a$. *Prin permutări circulare demonstrăm şi celelalte egalităţi.*

Metoda 2:

Observăm în figura de mai sus că $AC' = AB'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$ *ca tangente exterioare duse din acelaşi punct la un cerc. Rezultă că cele două tangente* AC' *şi* AB' *formează împreună perimetrul triunghiului şi deci* $AC' = AB' = p$ *iar* $BC' = BA' = AC' - AB = p - c$ *şi* $CA' = CB' = p - b$. *Aplicând teorema lui Pitagora în* $\Delta I_a AB'$, *unghiul ascuţit* A *valorează* $\frac{A}{2}$, *iar cateta* AB' *este egală cu* p. *Rezultă deci că* $r_a = I_a B' = AB' tg\frac{A}{2}$ *sau* $r_a = ptg\frac{A}{2} = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$. *Dacă se consideră triunghiul dreptunghic* $I_a CB'$, *în care unghiul ascuţit* $I_a CB'$ *este de* $\frac{180^0 - C}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$ *şi cateta* $CB' = p - b$, *atunci* $I_a B' = CB' tg\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$, *sau:* $r_a = (p-b)ctg\frac{C}{2}$. *Se consideră triunghiul* $I_a BC'$ *şi se obţine :* $r_a = (p-c)tg\frac{B}{2}$.

Procedând în acelaşi mod pentru celelalte cercuri exînscrise laturilor b *şi* c, *ale căror raze se notează cu* r_b *şi respectiv* r_c, *se obţine :*

$$r_b = ptg\frac{B}{2} = (p-a)ctg\frac{C}{2} = (p-c)ctg\frac{A}{2}$$

$$r_c = ptg\frac{C}{2} = (p-b)ctg\frac{A}{2} = (p-a)ctg\frac{B}{2}$$

Dacă se înlocuieşte în formula $r_a = ptg\frac{A}{2}$ *expresia lui* $tg\frac{A}{2}$ *în funcţie de laturi, se obţine :*

$$r_a = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$$ *sau* $r_a = \frac{S}{p-a}$. *Analog se procedează pentru a afla* r_b *şi* r_c.

Aplicaţii ale acestei proprietăţi:

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relația:*
$r_a r_b r_c = p^2 r$ *unde* r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise,* p *semiperimetrul iar* r *raza cercului înscris.*

Demonstraţie:

Înlocuind r_a, r_b, r_c *conform relaţiei demonstrate mai sus , egalitatea devine*

$$r_a r_b r_c = \left(\frac{S}{p-a}\right)\cdot\left(\frac{S}{p-b}\right)\cdot\left(\frac{S}{p-c}\right) = \frac{pS^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pS^3}{S^2} = pS = p^2 r.$$

Prin urmare, $r_a r_b r_c = p^2 r$.

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relația:*
$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$, *unde unde* r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise iar* p *semiperimetrul.*

Demonstraţie:

Conform relaţiilor de mai sus avem:

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-a)} + \frac{S^2}{(p-a)(p-c)}$$

$$= p(p-c) + p(p-a) + p(p-b) = p\left[3p - \left(a+b+c\right)\right] = p\cdot p = p^2$$

şi deci $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$.

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relația:*
$r_a + r_b + r_c - r = 4R$, *unde* r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise iar* R *raza cercului circumscris.*

Demonstraţie:

Folosind relaţiile de mai sus se obţine:

$$r_a + r_b = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} = \frac{S\left(p-a+p-b\right)}{\left(p-a\right)\left(p-b\right)} = \frac{Sc}{\left(p-a\right)\left(p-b\right)}$$

şi $r_c - r = \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \frac{S(p-p+c)}{p(p-c)} = \frac{Sc}{p(p-c)}$ *, de unde rezultă relaţia dintre razele cercurilor circumscrise, înscrise şi exînscrise:*

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{Sc}{(p-a)(p-b)} + \frac{Sc}{p(p-c)} = \frac{Sc\left[p(p-c)+(p-a)(p-b)\right]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

sau :

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{Sc\left(p^2 - pc + p^2 - ap - bp + ab\right)}{S^2} = \frac{abc}{S} = R.$$

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relaţia:* $(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = \frac{abcp^2}{S}$ *, unde* r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise ,* p *semiperimetrul,* S *aria triunghiului iar* a,b,c *sunt, respectiv laturile triunghiului.*

Demonstraţie:

Mai sus s-a demonstrat relaţia:

$r_a + r_b = \frac{Sc}{(p-a)(p-b)}$. *Analog se arată că* $r_b + r_c = \frac{Sa}{(p-b)(p-c)}$ *şi* $r_c + r_a = \frac{Sb}{(p-c)(p-a)}$*, de unde rezultă că:*

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = \left[\frac{Sc}{(p-a)(p-b)}\right]\cdot\left[\frac{Sa}{(p-b)(p-c)}\right]\cdot\left[\frac{Sb}{(p-c)(p-a)}\right]$$

$$= \frac{S^3abc}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{abcp^2}{S^2}.$$

Să se arate că în orice triunghi ΔABC *este adevărată relaţia:*

$$\frac{ar_a + br_b + cr_c}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = \frac{R}{r}(2R - r),$$

unde r_a, r_b, r_c *sunt razele cercurilor exînscrise ,* R *raza cercului circumscris,* r *raza cercului înscris,* a,b,c *lungimile laturilor triunghiului iar* A,B,C *măsurile unghiurilor sale.*

Demonstraţie:

Pentru simplitate se aduc la o formă mai simplă următoarele relaţii:

$$ar_a + br_b + cr_c = \frac{aS}{p-a} + \frac{bS}{p-b} + \frac{cS}{p-c} = S\left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) =$$

$$= S\left(\frac{\frac{a(a+c-b)(a+b-c)+b(b+c-a)(a+b-c)+c(b+c-a)(a+c-b)}{4}}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right) =$$

$$= S\left(\frac{6abc + a^3 + b^3 + c^3 - \left[ac(c+a)+bc(c+b)+ab(b+a)\right]}{4(p-a)(p-b)(p-c)}\right) =$$

$$= S\left(\frac{24Rrp + 2p\left(p^2 - 3r^2 - 6rR\right) - 2p\left(r^2 + p^2 - 2rR\right)}{4(p-a)(p-b)(p-c)}\right) =$$

$$= \frac{S \cdot 2p^2\left(8rR - 4r^2\right)}{4S^2} = \frac{2S(2R-r)}{r};$$

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C = 8a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 8a\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{8S^2}{4RS} = \frac{2S}{R}$$

Prin urmare, $\dfrac{ar_a + br_b + cr_c}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = \dfrac{2S(2R-r)}{r} \cdot \dfrac{R}{2S} = \dfrac{R}{r}(2R-r)$.

Bibliografie:

Matematică manual pentru clasa a IX-a, Mircea Ganga, Editura Mathpress, 2001

http://openstudy.com/updates/5205f6d4e4b01dd6868a525e

https://www.scribd.com/doc/134172187/aplica-iialetrigonometriei-ngeometriatriunghiului

3.O familie de inegalități

Marin Chirciu, profesor, Colegiul Național “Zinca Golescu”, Pitești
Daniel Văcaru, Colegiul Economic „Maria Teiuleanu”, Pitești

Această scurtă comunicare prezintă câteva inegalități, cu soluții deja apărute sau care vor apărea în reviste de matematică.
O fertilă inegalitate este
3803. Fie *a*, *b*, și *c* numere reale pozitive arătați că

$$\sqrt{(a^2+ac)}+\sqrt{(b^2+ab)}+\sqrt{(c^2+cb)}\le\sqrt{2}\cdot(a+b+c)$$

José Luis Díaz – Barrero, Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spania
(Crux Mathematicorum, 1/2013, 1/2014)

Una dintre soluțiile apărute ni se pare remarcabilă prin simplitate. Ea aparține domnilor
D.M.Bătinețu – Giurgiu și **Titu Zvonaru**
Cu inegalitatea **Cauchy Schwartz, avem**

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{(a+c)}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{(b+a)}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{(c+a)}\right)^2\le\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right)\cdot\left(\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{(b+a)^2}+\sqrt{(c+a)^2}\right)=$$
$$=2\cdot(a+b+c)^2$$

de unde dorita inegalitate.
Una dintre soluțiile apărute ni se pare remarcabilă prin simplitate. Ea aparține domnilor
D.M.Bătinețu – Giurgiu, Neculai Stanciu, și **Titu Zvonaru**
Cu inegalitatea **Cauchy Schwartz, avem**

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{(a+c)}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{(b+a)}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{(c+a)}\right)^2\le\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right)\cdot\left(\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{(b+a)}\right.$$
$$=2\cdot(a+b+c)^2$$

de unde dorita inegalitate.
„Fertilitatea” de mai sus este datorată întregii familii de generalizări care pot apărea.
Prima se bazează pe schimbarea literelor, adică are forma:

$$\sqrt{(a^2+ab)}+\sqrt{(b^2+bc)}+\sqrt{(c^2+ca)}\le\sqrt{2}\cdot(a+b+c).$$

Să introducem și un parametru $m\in\mathbb{R}_{(+)}$. Acest lucru ne permite să scriem

$$\sqrt{(a^2+mac)}+\sqrt{(b^2+mba)}+\sqrt{(c^2+mcb)}\le\sqrt{(1+m)}\cdot(a+b+c).$$

La limită, dacă $m=0$, obţinem chiar egalitate.
În final, să mărim şi numărul de numere
Găsim
Fie $a_1,a_2,\dots,a_n\in R_{(+)}$. **Atunci**

$$\sqrt{(a_1^2+a_1a_3+a_1a_4+\dots+a_1a_n)}+\sqrt{(a_2^2+a_2a_3+a_2a_4+\dots a_2a_n)}+\dots+\sqrt{a_n^2+a_na_1+\dots+a_na_{n-2}}$$
$$\ge\sqrt{(n-1)}\cdot(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

O altă inegalitate este cea propusă de
CMJ 1039.
Fie $x_1,x_2,\dots,x_n$ numere reale pozitive cu proprietatea că

$$x_1\cdot x_2\cdot\dots x_n=1\ n\ge2.$$

Pentru orice $m\ge2$ arătați că

$$\frac{n-1}{n} \cdot \sum_{cyclic} \left(\frac{x_i^m}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} \right) \geq 1.$$

José Luis Díaz – Barrero, Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spania

Soluție

Se observă că dacă $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ atunci $x_1^m \leq x_2^m \leq \cdots \leq x_n^m$ și $\frac{1}{x_2+x_3+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{x_1+x_3+\cdots+x_n} \leq \cdots \leq \frac{1}{x_2+x_3+\cdots+x_n}$ au aceeași variație. Cu inegalitatea Cebâșev, găsim

$$\sum_{cyclic} \left(\frac{x_i^m}{x_2+x_3+\cdots x_n} \right) \geq \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_1^n x_i^m \right) \cdot \left(\sum_{cyclic} \left(\frac{1}{x_1+x_2+\cdots \underbrace{x_i}_{missing} +\cdots+x_n} \right) \right) (1).$$ Dar

funcția $x \to x^m$ este convexă, așadar $\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_1^n x_i^m \right) \geq \left(\frac{\sum_1^n x_i}{n} \right)^m$ (2) și, cu AM – GM, avem $\sum_1^n x_i \geq n \sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)} = n$, de unde $\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_1^n x_i^m \right) \geq \left(\frac{\sum_1^n x_i}{n} \right)^m$ .Cu inegalitatea Bergstrom

$$\left(\sum_{cyclic} \left(\frac{1^2}{x_1+x_2+\cdots \underbrace{x_i}_{missing} +\cdots+x_n} \right) \right) \geq \frac{\left(\sum_1^n 1 \right)^2}{\sum_{cyclic} (x_1+x_2+\cdots+ \underbrace{x_i}_{missing} +x_n)} = \frac{n^2}{(n-1) \cdot \sum_1^n x_i} (4).$$

(1) , (2) ,(3) și (4) conduc către

$$\sum_{cyclic} \left(\frac{x_i^m}{x_2+x_3+\cdots x_n} \right) \geq \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_1^n x_i^{(m-2)} \right) \cdot \left(\sum_{cyclic} \left(\frac{x_i^2}{x_1+x_2+\cdots \underbrace{x_i}_{missing} +\cdots+x_n} \right) \right) \geq \left(\frac{\sum_1^n x_i}{n} \right)^m \cdot \left(\frac{n^2}{(n-1)\sum_1^n x_i} \right) = \left(\frac{1}{n^{(m-2)} \cdot (n-1)} \right) \cdot \left(\sum_1^n x_i \right)^{(m-1)}$$

.

Din nou **AM – GM** ne asigură că $\left(\sum_1^n x_i \right)^{(m-1)} \geq \left(n \left(\sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n)} \right) \right)^{(m-1)} = n^{(m-1)}$ Aceasta conduce către concluzia noastră.

Din aceeași familie de inegalități este și

Q19.

Arătați că, dacă *a, b, c* > 0 și $x \in \mathbb{R}$ atunci

$$\sum \left(\frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Mihály Bencze, Brașov, Romania

Soluție

Prin amplificare, obținem

$$\frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \frac{a^4}{a^2 \sin 2x + ab\cos^2 x}$$

Găsim apoi

$$\sum\left(\frac{a^3}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}\right)=\sum\left(\frac{a^4}{a^2\sin^2 x+ab\cos^2 x}\right)\overset{Bergstrom}{\widehat{\geq}}\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)\sin^2 x+(ab+bc+ca)\cos^2 x}.$$

Dar se știe
că

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)\sin^2 x+(ab+bc+ca)\cos^2 x\leq(a^2+b^2+c^2)\cdot(\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1})=a^2+b^2+c^2.$$

Bibliografie
[1] Crux Mathematicorum
[2] Sclipirea minții
[3] College Mathematical Journal

Câteva probleme de trigonometrie

Prof. Ţâmpu Andreea-Iuliana

Liceul Tehnologic de Marină, Galaţi

PROBLEMA 1. Să se calculeze produsul:

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a,$$

ştiind că: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Soluţie. Dacă în formula $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$, înlocuim a prin $2a$, apoi prin $4a$, …….,2^n,obţinem:

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$$

$$\cos 2a = \frac{\sin 4a}{2 \sin 2a}$$

$$\cos 4a = \frac{\sin 8a}{2 \sin 4a}$$

……………………

$$\cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2 \sin 2^n a}$$

şi dacă facem produsul acestor egalităţi, membru cu membru şi simplificăm termenii în diagonală, obţinem:

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2^{n+1} \sin a}$$

PROBLEMA 2. Să se arate că ecuaţia:

$$p \cos 6x + 2 (p^2 + 1) \sin 3x - 3p = 0$$

are rădăcini reale, oricare ar fi valoarea parametrului p; să se calculeze valorile lui x când $p = \sqrt{2}$

Soluţie. Pentru rezolvare se înlocuieşte cos 6x în funcţie de sin 3x şi se obţine o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu necunoscuta sin *3x*.

$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x = 1 - 2\sin^2 3x,$

$p\,(1 - 2\sin^2 3x) + 2\,(p^2 + 1)\sin 3x - 3p = 0,$

$-2p\sin^2 3x + 2\,(p2 + 1)\sin 3x - 2p = 0,$

$(\sin 3x)^2 - \frac{p^2+1}{p}\sin 3x + 1 = 0$

$\sin 3x_1 = p\ , \qquad \sin 3x_1 = \frac{1}{p}$

Dacă rădăcinile *p* şi $\frac{1}{p}$ sunt egale, adică $p = \frac{1}{p}$ sau *p2* = 1, adică p = $\pm$ 1, rădăcinile *x* corespunzătoare sunt reale şi egale cu

$3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, de unde rezultă: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$

Dacă rădăcinile *p* şi $\frac{1}{p}$ sunt diferite, adică $p \neq \pm 1$, una din rădăcini, *p* sau $\frac{1}{p}$, este totdeauna, în valoare absolută, mai mică decât unitatea şi cealaltă mai mare ca unitatea, pentru că produsul lor este egal cu + 1 şi aceasta, oricare ar fi valoarea parametrului *p*. Urmează că x-ul corespunzător rădăcinii mai mici ca unitatea, în valoare absolută, este real.

De exemplu, pentru $p = \sqrt{2}$

$\sin 3x_1 = \sqrt{2} > 1$, x_1 este imaginar*;*

$\sin 3x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, x_2 este real*;*

$3x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{sau} \quad 3x_2 = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \quad \text{sau} \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + (2k+1)\frac{\pi}{3}.$

PROBLEMA 3. Se dă ecuaţia:

(p - 1) cos 2x - (2p^2 - 4p + 4) cos x + 3p -3 = 0, în care x este necunoscută, iar p un parametru.

a) Să se calculeze valorile lui x când p - 3 şi p = $\frac{3}{2}$.

b) Să se demonstreze că ecuaţia are rădăcinile reale, oricare ar fi valoarea parametrului p.

Soluţie. Înlocuim cos *2x* în funcţie de cos *x* şi obţinem o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu cos *x*, adică cos $2x$ = $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$,

$(p - 1)(2\cos^2 x - 1) - (2p2 - 4p + 4)\cos x + 3(p - 1) = 0$,

$2(p - 1)\cos^2 x - 2(p2 - 2p + 2)\cos x + 2(p - 1) = 0$,

$\cos^2 x - \left(p - 1 + \frac{1}{p-1}\right)\cos x + 1 = 0$

$$\cos x_1 = p - 1, \quad \cos x_2 = \frac{1}{p-1}$$

Dacă rădăcinile sunt egale, $p - 1 = \frac{1}{p-1}$ sau $(p-1)^2 = 1$, deci $p(p - 2) = 0$, adică $p = 0$ sau $p = 2$, atunci rădăcinile x corespunzătoare sunt reale şi egale cu $x = k\pi$.

Dacă rădăcinile $p - 1$ şi $\frac{1}{p-1}$ sunt diferite, una din rădăcini este, în valoare absolută, mai mică decât unitatea şi cealaltă mai mare ca unitatea, pentru că produsul lor este egal, cu +1, oricare ar fi valoarea parametrului p, iar x-ul corespunzător rădăcinii mai mici ca unitatea, în valoare absolută, este real.

Pentru $p = 3$, $\cos x_1 = 2 > 1$, x_1 este imaginar; $\cos x_2 = \frac{1}{2} < 1$, x_2 este real şi egal cu:

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Pentru $p = \frac{3}{2}$, $\cos x_1 = \frac{1}{2}$, x_1 este real şi egal cu:

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

iar $\cos x_2 = 2 > 1$, deci x_2 este imaginar.

PROBLEMA 4. Într-un triunghi, unghiurile sunt proporţionale cu numerele 3, 4, 5 ; cu ce numere sunt proporţionale laturile triunghiului ?

În alt triunghi, laturile sunt proporţionale eu numerele 3, 4, 5 ; cu ce numere sunt egale unghiurile triunghiului ?

Soluţie. Fie ABC triunghiul, A, B, C, unghiurile şi a, b, c, laturile lui. Prin ipoteză:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{3+4+5} = \frac{180^0}{12}$$

$$A = \frac{180^0}{4} = 45^0$$

$$B = \frac{180^0}{3} = 60^0$$

$$C = \frac{5 * 180^0}{12} = 75^0$$

Pe de altă parte, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ deci laturile *a, b, c* sunt proporţionale cu sin 45°

sin 60°, sin 75°.

Ştim că : sin 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, sin 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$;

sin 75° = sin (30° + 45°) = sin 30° cos 45° + cos 30° sin 45° =

$\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{3}+1).\frac{\sqrt{2}}{4}$

Dacă înmulţim sinusurile de la numitor cu 4, laturile *a, b, c* sunt proporţionale cu numerele: $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Presupunem în al doilea rând că laturile *a, b, c* sunt proporţionale cu numerele 3, 4, 5, deci $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$, unde *k* este coeficientul de proporţionalitate.

Formula: $c2 = a2 + b2 - 2ab \cos C$ devine:

$25\,k2 = 9k2 + 16\,k2 - 24\,k^2 \cos C$

adică: $\cos C = 0$, $C = 90°$, triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*, deci $a = c \sin A$, $b = c \sin B$, de unde:

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

A = 36°52'11" si B = 53°7'48"

Ca verificare, *A* + *B* = 36°52'11" + 53°7'48" = 89°59'59", adică *A* + *B* = 90°, valoarea calculată fiind o valoare *apropiată* cu o aproximaţie de 1" prin lipsă.

Unghiurile triunghiului sunt deci

A = 36°52'11", *B* = 53°7'48", *C* = 90°.

PROBLEMA 5. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x \; \text{tg}\, x - \text{tg}\, x - \sin 2x + 1 = 0.$$

Soluţie. Grupăm termenii în sin 2x şi ecuaţia devine:

$$\sin 2x \; (\text{tg}\, x - 1) + 1 - \text{tg}\, x = 0,$$

$$(\text{tg}\, x - 1)(\sin 2ax - 1) = 0.$$

Ecuaţia dată se descompune în următoarele două ecuaţii :

tg x = 1, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; sin 2x = 1, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Rădăcinile ecuaţiei date sunt deci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

O altă metodă pentru rezolvarea ecuaţiei date este să exprimăm sin 2x în funcţie de t = tg$x$, prin formula

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\, tg\, x}{1+tg^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$$

şi ecuaţia dată devine

$$\frac{2t}{1+t^2} - t - \frac{2t}{1+t^2} + 1 = 0$$

$2t^2 - 2t + (1 - t)(1 + t^2) = 0,$

$- t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = 0,$

$(- t + 1)^3 = 0,\ - t + 1 = 0,\ t = 1,$ tg $x = 1,$

obţinem: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$