



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

22 februarie 2015

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7 p)

- a) Dacă x și y sunt numere raționale cu proprietatea că $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$, demonstrați că $x = y = 0$.
b) Determinați toate perechile de numere raționale (a, b) care verifică egalitatea
$$\sqrt{2(a+1)^2} - 2\sqrt{2} = |b+1|\sqrt{3} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|.$$

SUBIECTUL II (7 p)

- a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}, \forall n, k \in \mathbb{N}$.

- b) Se dau numerele :

$$a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30}$$

și $b = 3+8+13+\dots+10018$. Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}}$.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie ABC un triunghi oarecare, iar M și D mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Dacă $E \in (AD)$ astfel încât $AD = 4 \cdot ED$, iar $\{N\} = ME \cap BC$, să se demonstreze că:

- a) $[ME] \equiv [EN]$;
b) $[DN] \equiv [NC]$.

(Gazeta Matematica nr. 1/2014)

SUBIECTUL IV (7 p)

În pătratul ABCD de latură 5 cm, se consideră punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $m(\angle EAF) = 45^\circ$. Dacă aria triunghiului CEF este de 3 cm^2 , calculați aria triunghiului AEF.

Notă:

- Timp de lucru : **3 ore**.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

Botoșani, 22.02.2015

Clasa a VII-a

Barem de notare

Subiectul I.

- a) Presupunem că $y \neq 0$. Atunci relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, fals.....1p
 Rezultă că $y=0$, deci și $x=0$1p
 b) Relația din enunț devine $|a+1| \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = |b+1| \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$1p
 Echivalent cu $(|a+1| - 3) \cdot \sqrt{2} = (|b+1| - 1) \cdot \sqrt{3}$1p
 Conform a), rezultă $|a+1| - 3 = 0$ și $|b+1| - 1 = 0$ 2p
 Obținem perechile (2;0), (-4;0), (2;-2), (-4;-2).....1p

Subiectul II.

- a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{n+k-n}{n(n+k)} = \frac{k}{n(n+k)}, \forall n, k \in \mathbb{N}$2p
 b) $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30} = \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$ 1p
 $b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018 = 3 + (5 \cdot 1 + 3) + (5 \cdot 2 + 3) + \dots + (5 \cdot 2003 + 3) = \dots$1p
 $= 3 \cdot 2004 + 5 \cdot (1+2+3+\dots+2003) = 1002 \cdot 1001$ 1p
 $15 \cdot a + \frac{b}{1002} = 10028$ 1p
 $\left[\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}} \right] = 100$1p



Subiectul III.

a) Fie P mijlocul segmentului [BD].....1p

[MP] linie mijlocie în $\triangle ABD \Rightarrow MP \parallel AD$ și $MP = \frac{AD}{2}$1p

Demonstratia ca [ED] linie mijlocie în $\triangle NMP$1p

Concluzie, E mijlocul lui [MN].....1p

b) P mijlocul lui [BD] $\Rightarrow PD = \frac{BD}{2}$1p

BD=DC și D mijlocul lui [PN](conform a).....1p

Concluzia.....1p

Subiectul IV.

Se prelungește [CB] cu segmentul [BT] $\equiv [DF]$, $B \in (TE)$ (1p)

$\triangle ADF \equiv \triangle ABT \Rightarrow \angle TAB \equiv \angle DAF \Rightarrow m(\angle TAE) = m(\angle TAB) + m(\angle BAE) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (1p)

$\triangle TAE \equiv \triangle FAE \Rightarrow A_{TAE} = A_{FAE}$ și $A_{TAE} = A_{ABT} + A_{ABE} = A_{ADF} + A_{ABE} \Rightarrow A_{FAE} = A_{ADF} + A_{ABE}$ (2p)

$A_{ABEFD} = 2A_{AEF}$ (1p)

$A_{AEF} = (A_{ABCD} - A_{CFE}) : 2 = (25 - 3) : 2 = 11 \text{ cm}^2$ (2p)