

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 22.02.2015
CLASA a-XII-a

1. Fie $f: R \rightarrow R$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa.

Determinați funcția f astfel încât $(e^{2x} + 1)(f(x) - F(x)) = e^{2x}, \forall x \in R$.

Costel Cerchez, profesor, Brăila

2. Fie $G = \left(\frac{1}{k}, k\right)$, $k > 1$ și legea:

$$x * y = \frac{\frac{k^2 + 1}{k}xy - 2(x + y) + \frac{k^2 + 1}{k}}{2xy - \frac{k^2 + 1}{k}(x + y) + \frac{k^4 + 1}{k^2}}, \quad \forall x, y \in G.$$

Să se arate că:

a) $(G, *)$ este grup;

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, $n \in N^* \setminus \{1\}$ și să se determine părțile stabile finite ale lui $(G, *)$;

c) Să se determine un automorfism strict descrescător al lui $(G, *)$.

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

3. Fie $(G, *)$ un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G . Să se arate că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Romeo Raicu, Gazeta matematică nr.9/2013

4. Să se calculeze $\int \frac{\sin 2x - tg^2 x}{e^{tgx} + \sin^2 x} dx$, $x \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Narcis Gabriel Turcu, profesor, Brăila

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.