OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A -V-A - Soluții

Barem/soluții

1.a) Numărul 10 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 0, numărul 11 nu este *interesant*, deoarece nu este divizibil cu 2. Cel mai mic număr *interesant* este 12, deoarece $12 \vdots 1$, $12 \vdots 2$ şi $12 \vdots 3$.

b) Considerăm şirul de numere naturale

$$12,\ 11112,\ 11111112,\ ...,\ \underbrace{111...111}_{(3n+1)\text{ cifre}}2,\ ...$$

Fiecare termen al şirului este număr *interesant*, deoarece este divizibil cu 1, cu 2 şi cu 3. Fiind o infinitate de termeni, problema este rezolvată.

2. **a)** $\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2=\left(64+1\right)\cdot 16=65\cdot 16=1040$

b) $N=1040^{2015}=1040^{2014}\cdot 1040=1040^{2014}\cdot\left(8^2+1^2\right)\cdot 4^2$

$\Rightarrow N=\left(1040^{1007}\cdot 8\cdot 4\right)^2+\left(1040^{1007}\cdot 4\right)^2$

3. $P_n(P_n^{\ 2}-1)=2^n\,(2^{2n}-1)=8^n-2^n$ ……………………..……..1p

$P_n(P_n^{\ 2}+1)=2^n\,(2^{2n}+1)=8^n+2^n$ …………………………..1p

$U(8^n)\in\{8,4,2,6\}$ ………………………………………...1p

$U(2^n)\in\{2,4,8,6\}$ ………………………………………...1p

$U(8^n-2^n)=0$ pt n=4k, n=4k+2……………………………1p

U(8^n+2^n)=0 pt n=4k+1, n=4k+3…...……………………….1p

Concluzia …………………………………………………1p

4. Deoarece $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)$ este număr par, iar 4029 este număr impar se impune ca 4^x să fie număr impar rezultând $x=0$.

Înlocuind se obține: $2\cdot\left(3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}\right)=4028$, de unde rezultă $3^{2y}\cdot 5^y-\overline{zz}=2014$.

Dar $U\left(3^{2y}\cdot 5^y\right)=U\left(9^y\cdot 5^y\right)=U\left(45^y\right)=5$ pentru $y\neq 0$, de unde rezultă $z=1$.

Obținem $45^y=2025$, adică $y=2$.