OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A VII-A – Soluții

1. **Soluție.** $\sqrt{x-5} \geq 0$ si x-5 ≥ 0 => 15-y$^2 \geq 0$ => y$^2 \leq 15$ si y $\in$ Z=>y$^2 \in \{0,1,4,9\}$

- $y^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 15 \Rightarrow x-5 = 225 \Rightarrow x = 230$
- $y^2 = 1; y = \pm 1 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 14 \Rightarrow x-5 = 196 \Rightarrow x = 201$
- $y^2 = 4; y = \pm 2 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 11 \Rightarrow x-5 = 121 \Rightarrow x = 126$
- $y^2 = 9; y = \pm 3 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 6 \Rightarrow x-5 = 36 \Rightarrow x = 41$

2.Soluție. a) $a = \sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{90}} = \sqrt{\dfrac{x+y+z}{9}} = \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3}$

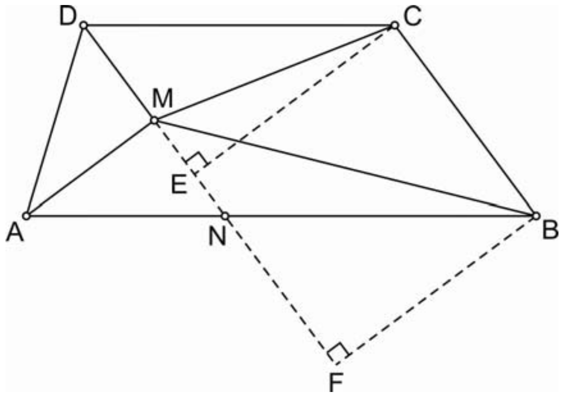
- $a \in Q \Leftrightarrow x+y+z = k^2, k \in N$
- Deoarece $1 \leq x < y < z \leq 8 \Rightarrow k^2 \in \{9,16\}$. Deci $a \in \left\{1, \dfrac{4}{3}\right\}$.
- b) Pentru $n = 2k, k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, avem $a = \sqrt{\dfrac{10(x+y+z)}{9 \cdot 10^{n+1}}} = \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{3 \cdot 10^k}$ şi

$a \in \left\{\dfrac{1}{10^k}, \dfrac{4}{3 \cdot 10^k}\right\}$

- Pentru $n = 2k+1, k \in N$, avem $a = \dfrac{\sqrt{10(x+y+z)}}{3 \cdot 10^{k+1}}$ pentru $a \in Q \Rightarrow x+y+z = 10$ şi

$a \in \left\{\dfrac{1}{3 \cdot 10^k}\right\}$.

3.Soluție. a) Presupunem, prin reducere la absurd, că punctele *A*, *M*, *C* sunt coliniare. Atunci $\angle DCA \equiv \angle CAB$ (alterne interne). Dar din ipoteză avem că $[AM$ este bisectoarea unghiului *DAB*, deci $\angle CAB \equiv \angle CAD$. Deducem că $\angle DCA \equiv \angle CAD$, deci ΔDCA este isoscel cu $AD = CD$, fals. Se contrazice faptul că din ipoteză avem $AD \neq CD$. Presupunerea făcută este falsă, deci punctele A, M, C nu sunt coliniare.



b) Fie $\{N\} = DM \cap AB$. Deoarece $[DN$ este bisectoarea unghiului ADC, avem $\angle ADN \equiv \angle CDN$, iar din $DC \parallel AB$ rezultă $\angle CDN \equiv \angle AND$ (alterne interne). Prin urmare, $\angle ADN \equiv \angle AND$, deci ΔADN este isoscel cu $AD = AN$. Atunci bisectoarea AM este şi mediană, deci $\text{aria}[AMD] = \text{aria}[AMN]$.

Din ipoteză avem $AB = AD + DC$. Obținem astfel că $NB = AB - AN = AB - AD = DC$ şi cum $NB \parallel DC$, rezultă că $NBCD$ este paralelogram. Construim $CE \perp DN$ şi $BF \perp DN$, $E, F \in DN$ şi avem $CE = BF$, deci $\text{aria}[CMD] = \dfrac{CE \cdot DM}{2} = \dfrac{BF \cdot MN}{2} = \text{aria}[BMN]$. În final,

$\text{aria}[ADCM] = \text{aria}[ADM] + \text{aria}[CMD] = \text{aria}[AMN] + \text{aria}[BMN] = \text{aria}[AMB]$.

4. **Soluție.** a) Mulțimea numerelor de pe tablă este

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21\}.$$

Suma lor este $S_{16} = 171$. Notăm cu n numărul nefolosit şi cu S_{15} suma numerelor aşezate în cele 15 pătrățele ale dreptunghiului. Avem $S_{15} = 171 - n$. Notăm cu S_c suma numerelor de pe o coloană şi cu S_l suma numerelor de pe o linie $\Rightarrow S_{15} = 5S_c$ şi $S_{15} = 3S_l \Rightarrow S_{15} \vdots 5$ şi $S_{15} \vdots 3 \Rightarrow S_{15} \vdots 15 \Rightarrow 171 - n \vdots 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 165+6-n \vdots 15 \Leftrightarrow 6-n \vdots 15 \Leftrightarrow n-6 \vdots 15 \Rightarrow n \in \{6,21\}$. Dar 21 este cel mai mare număr de pe tablă $\Rightarrow n \neq 21 \Rightarrow n=6$.

b) $S_{15}=171-6=165 \Rightarrow S_c=33$ şi $S_l=55$. Un exemplu ar fi:

5	11	17	13	9
7	19	1	18	10
21	3	15	2	14