OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VIII-A - Soluții

1. Se consideră numărul $N=\sqrt{2009\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2015+16}$. Calculați $\left[\frac{N}{2015}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.

Ştefan Ciochină, Brăila

Soluție.

$N=\sqrt{2009\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2015+16}\Rightarrow N=\sqrt{(2012-3)(2012-1)(2012+1)(2012+3)+16}$

$\Rightarrow N=2012^2-5$

$\left[\frac{N}{2015}\right]=\left[\frac{2012^2-5}{2015}\right]=\left[\frac{2015\cdot 2009+4}{2015}\right]=2009$

2. Dacă numerele reale $x,y,z\in[0,+\infty)$ verifică relațiile:

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{x\cdot y}+1 \text{ şi } \frac{y+z}{2}\le\sqrt{y\cdot z}+4,$$

demonstrați că $\left|\sqrt{z}-\sqrt{x}\right|\le 3\sqrt{2}$.

Marius Damian, Brăila

Soluție. Avem:

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{x\cdot y}+1\Rightarrow x-2\sqrt{x\cdot y}+y\le 2\Rightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\le 2\Rightarrow\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\le\sqrt{2}$$

şi

$$\frac{y+z}{2}\le\sqrt{y\cdot z}+4\Rightarrow y-2\sqrt{y\cdot z}+z\le 8\Rightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\le 8\Rightarrow\left|\sqrt{y}-\sqrt{z}\right|\le 2\sqrt{2}.$$

Folosind acum inegalitatea triunghiulară pentru module, obținem

$$\left|\sqrt{z}-\sqrt{x}\right|=\left|\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\right|\le\left|\sqrt{z}-\sqrt{y}\right|+\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|\le\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi $N\in(CD)$ astfel încât $DN=\frac{1}{3}DC$.

a) Determinați muchia cubului ştiind că aria triunghiului $A'AN$ este $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ cm^2.

b) Determinați cosinusul unghiului dintre planele $(A'AN)$ şi $(D'DA)$.

c) Calculați distanța de la D la planul $(A'AN)$.

Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție. **a)** Fie x muchia cubului ,din triunghiul dreptunghic AND calculam
$AN=\frac{x\sqrt{10}}{3} \Rightarrow A_{A'AN}=\frac{x^2\sqrt{10}}{6}=\frac{8\sqrt{10}}{3} \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4$

b) Proiectia triunghiului $A'AN$ pe planul $(D'DA)$ este triunghiul $A'AD \Rightarrow$
Aria$[A'AD]$=Aria $[A'AN]\cdot\cos<[(A'AN),(A'AD)] \Rightarrow$
$\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2\sqrt{10}}{6}\cdot$cosinusul$<[(A'AN),(A'AD)] \Rightarrow$ cosinusul$<[(A'AN),(A'AD)]=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

c) Fie $DT\perp AN \Rightarrow DT$=distanta de la D la planul $(A'AN)$;$DT\perp AN$;$DT\perp AA'$;
$AA', AN\subset (A'AN) \Rightarrow DT\perp (A'AN)$;$DT=\frac{AD\cdot DN}{AN}=\frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}$

4. Se consideră triunghiul ABC, $AC=BC$, $m(\angle ACB)=90^\circ$ şi triunghiul DAB, $DA=DB$, situate în plane perpendiculare. Fie $M\in(BC)$, $BM=2CM$, $N\in(AC)$, $AC=3AN$, $P\in MN\cap AB$, T mijlocul segmentului $[AB]$, iar G centrul de greutate al triunghiului DAB. Să se calculeze tangenta unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele (ABC) şi (DBC), ştiind că $3SD=5CT$, unde $S\in PG\cap AD$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție. Fie V mijlocul lui $[BC]$. $[TV]$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC, m(\angle ACB)=90^\circ$, deci $TV\perp BC$.
Cum $[DT]$ e linie mijlocie în triunghiul $DAB, DA=DB$, rezultă că $DT\perp BC$. Mai avem şi $(ABC)\perp(ABD)$,deci $DT\perp(ABC)$.Cu teorema celor trei perpendiculare rezultă că $DV\perp BC$, deci $tg(\angle((ABC),(DBC)))=tg(\angle(TV,DV))=\frac{DT}{TV}$.

Fie $CM=AN=x, BM=CN=2x, AB=3x\sqrt{2}, CT=\frac{3x\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SD=\frac{5x\sqrt{2}}{2}$.

Se aplică Menelaos în ΔABC, $P-N-M$:
$$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=1\Rightarrow\frac{PA}{PA+3\sqrt{2}x}\cdot\frac{2x}{x}\cdot\frac{2x}{x}=1\Rightarrow PA=x\sqrt{2}.$$

Se aplică Menelaos în ΔATD, $P-S-G$:

$$\frac{PA}{PT}\cdot\frac{GT}{GD}\cdot\frac{SD}{SA}=1\Rightarrow\frac{x\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5x\sqrt{2}}{2}}{SA}=1\Rightarrow SA=\frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicând Pitagora în ΔATD, avem $\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{5x\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{3x\sqrt{2}}{2}\right)^2+DT^2\Rightarrow DT=\frac{3x\sqrt{6}}{2}$,

deci $tg\left(\angle(TV,DV)\right)=\frac{\frac{3x\sqrt{6}}{2}}{\frac{3x}{2}}=\sqrt{6}$.