OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A X-A

1. Se dau relațiile

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \quad (1)$$

şi

$$4^y=4y(3x+4). \quad (2)$$

a) Să se demonstreze că nu există $x, y \in (0,+\infty)$ care verifică relația (1).

b) Să se determine $x, y \in R$ care verifică simultan relațiile (1) şi (2).

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție.

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \Leftrightarrow 5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=(x+y+2\log_2 y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=(x+y+2\log_2 y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x+y)^2+5\log_2^2 y=(x+y)^2+4(x+y)\log_2 y+4\log_2^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y)^2-4(x+y)\log_2 y+\log_2^2 y=0 \Leftrightarrow \left[2(x+y)-\log_2 y\right]^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)=\log_2 y,$$

unde $x \in R$ şi $y \in (0,+\infty)$.

a) Vom demonstra că $y > \log_2 y,\ \forall y \in (0,+\infty) \Leftrightarrow 2^y > y,\ \forall y \in (0,+\infty)$.

Notăm $[y]=n \in N \Rightarrow n \le y < n+1 \Rightarrow 2^n \le 2^y < 2^{n+1}$. Se demonstrează uşor prin inducție că $2^n \ge n+1$, $\forall n \in N \Rightarrow 2^y \ge 2^n \ge n+1 > y \Rightarrow 2^y > y \Rightarrow y > \log_2 y,\ \forall y \in (0,+\infty)$.

Dar $2(x+y) > y,\ \forall x, y \in (0,+\infty) \Rightarrow 2(x+y) > \log_2 y \Rightarrow \forall x, y \in (0,+\infty)$ egalitatea $2(x+y)=\log_2 y$ nu poate avea loc.

b) (1) $\Leftrightarrow 2x+2y=\log_2 y \Leftrightarrow 2x=\log_2 y-2y \Leftrightarrow 2x=\log_2 y-\log_2 2^{2y} \Leftrightarrow 2x=\log_2 \dfrac{y}{2^{2y}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}=\frac{y}{2^{2y}} \Leftrightarrow 4^x=\frac{y}{4^y} \Leftrightarrow \frac{4^y}{y}=\frac{1}{4^x}.$$

Din (1) şi (2) obținem $\frac{1}{4^x}=4(3x+4)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^x=4(3x+4)$.

Notăm $f,g:R\to R$, $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ şi $g(x)=4(3x+4)$ cu f strict desccrescătoare şi g strict crescătoare, deci ecuația $f(x)=g(x)$ are cel mult o soluție. Dar $f(-1)=g(-1)=4\Rightarrow x=-1$ este soluția unică a ecuației $\left(\frac{1}{4}\right)^x=4(3x+4)$. Pentru $x=-1$ obținem $4^y=4y$.

Notăm $h_1,h_2:R\to R$, $h_1(y)=4^y$ şi $h_2(y)=4y$ cu h_1 funcție convexă şi h_2 funcție liniară, deci ecuația $h_1(y)=h_2(y)$ are cel mult două soluții. Dar $h_1\left(\frac{1}{2}\right)=h_2\left(\frac{1}{2}\right)=2$ şi $h_1(1)=h_2(1)=4\Rightarrow$ ecuația $4^y=4y$ are soluțiile $y_1=\frac{1}{2}$ şi $y_2=1$.

Deci $(x,y)\in\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(-1,1)\right\}$.

2. Determinați perechile de numere complexe (u,v) cu $|u|=|v|=1$ astfel încât

$$|1-u|+|v^2+1|=|1-v|+|u^2+1|=\sqrt{2}.$$

Marius Damian, Brăila

Soluție algebrică. Fie $u=a+bi$ cu $a^2+b^2=1$ şi $v=c+di$ cu $c^2+d^2=1$. Atunci $|1-u|+|v^2+1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1-a-bi|+|c^2+2cdi-d^2+1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(1-a)^2+b^2}+|2c^2+2cdi|=\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-2a+a^2+b^2}+2|c|\cdot|c+di|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2-2a}+2|c|=\sqrt{2}$, deci $2-2a\geq 0\Leftrightarrow a\leq 1$ şi $\sqrt{2-2a}\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow 2-2a\leq 2\Leftrightarrow a\geq 0$, deci $a\in[0,1]$. Analog $\sqrt{2-2c}+2|a|=\sqrt{2}\Rightarrow c\in[0,1]$.

$$\begin{cases}\sqrt{2-2a}+2c=\sqrt{2}\\ \sqrt{2-2c}+2a=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2-2a}+2c=\sqrt{2-2c}+2a\Leftrightarrow\sqrt{2-2a}-\sqrt{2-2c}=2a-2c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2-2a-2+2c}{\sqrt{2-2a}+\sqrt{2-2c}}=2a-2c\Rightarrow a=c.$$

Astfel, $\sqrt{2-2a}+2a=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2-2a}=\sqrt{2}-2a$ cu $\sqrt{2}-2a\geq 0\Rightarrow a\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $2-2a=2-4\sqrt{2}a+4a^2\Rightarrow 4a^2=4\sqrt{2}a-2a$.

I. $a=0$;

II. $a \neq 0 \Rightarrow 4a = 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Dar $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \leq 1$, fals!

Deci $a = c = 0,\ b = \pm 1,\ d = \pm 1$.

Problema are patru soluții: $(u,v) \in \{(i,i),(-i,i),(i,-i),(-i,-i)\}$.

Soluție trigonometrică. Scriem u,v în formă trigonometrică. Există $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$ şi $v = \cos\beta + i\sin\beta$.

Atunci $\frac{\alpha}{2} \in [0,\pi) \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} \in [0,1]$ şi $\frac{\beta}{2} \in [0,\pi) \Rightarrow \sin\frac{\beta}{2} \in [0,1]$, deci

$$|1-u| = |(1-\cos\alpha) - i\sin\alpha| = \sqrt{2-2\cos\alpha} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

şi analog $|1-v| = 2\sin\frac{\beta}{2}$.

De asemenea,

$|u^2+1| = |(1+\cos 2\alpha) + i\sin 2\alpha| = \sqrt{2+2\cos 2\alpha} = \sqrt{4\cos^2\alpha} = 2|\cos\alpha| = 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|$ şi analog

$|v^2+1| = 2\left|1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|$.

Prin urmare, folosind şi ipoteza, avem:

$$2\sqrt{2} = |1-u| + |1-v| + |u^2+1| + |v^2+1| = \left(2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\right) + \left(2\sin\frac{\beta}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|\right). \quad (1)$$

Dar

$$2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = \begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ dacă } \frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right] \\ 2\sin\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2, \text{ dacă } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

deci apar cazurile:

- Dacă $\frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, atunci

$$E(\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Cum $\sin\frac{\alpha}{2} \in \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, avem $E(\alpha) \in [\sqrt{2}, 2]$.

- Dacă $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, atunci

$$E(\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2 = \left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Cum $\sin\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, avem $E(\alpha) \in \left(\sqrt{2}, 4\right)$.

Cele două cazuri analizate spun că expresia

$$E(\alpha,\beta) = \left(2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\left|1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\right) + \left(2\sin\frac{\beta}{2} + 2\left|1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right|\right)$$

are valoarea minimă $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, iar aceasta este atinsă dacă şi numai dacă $\alpha, \beta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Ținând cont de (1), deducem că există exact patru triplete de numere complexe (u,v) care verifică ipoteza, anume $(u,v) \in \{(i,i), (-i,i), (i,-i), (-i,-i)\}$.

3. Fie $m, n \in N \cap [2, +\infty)$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0, +\infty)$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$.

a) Demonstrați că $\sqrt[m]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} + \sqrt[m]{x_2} \cdot \sqrt[n]{x_3} + \sqrt[m]{x_3} \cdot \sqrt[n]{x_4} + \sqrt[m]{x_4} \cdot \sqrt[n]{x_1} \le 4.$

b) Când are loc egalitatea la a)?

Gheorghe Alexe, Brăila

Soluție. a) $\begin{cases} \sqrt[m]{x_1} \le \frac{m-1+x_1}{m} \\ \sqrt[n]{x_2} \le \frac{n-1+x_2}{n} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \le \frac{(m-1+x_1)(n-1+x_2)}{m \cdot n} \le$$

$$\le \frac{(m-1)(n-1)+(m-1)x_2+(n-1)x_1+x_1 \cdot x_2}{m \cdot n}$$

Atunci avem

$$\sqrt[m]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} + \ldots + \sqrt[m]{x_4} \cdot \sqrt[n]{x_1} \le$$

$$\le \frac{4(m-1)(n-1) + [(m-1)+(n-1)](x_1+x_2+x_3+x_4) + (x_1+x_3)(x_2+x_4)}{m \cdot n}$$

$$(x_1+x_3)(x_2+x_4) \le \left[\frac{(x_1+x_3)+(x_2+x_4)}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow (x_1+x_3)(x_2+x_4) \le 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} + \ldots + \sqrt[m]{x_4} \cdot \sqrt[n]{x_1} \le$$

$$\le \frac{4(m-1)(n-1) + 4(m+n-2) + 4}{m \cdot n} \le$$

$\leq \frac{4(m\cdot n - m - n + 1 + m + n - 2 + 1)}{m\cdot n} \leq \frac{4\cdot m\cdot n}{m\cdot n} \leq 4$

$\Longrightarrow \sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2} + \sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3} + \sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4} + \sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1} \leq 4$

b) Avem egalitate $\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ $(m_g = m_a)$

4. Să se determine toate funcțiile $f : N \to N$ care îndeplinesc condiția:

$$x + \sqrt{x} - f(x) = \sqrt{f(f(x))},\ \ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. Demonstrăm mai întâi că f este injectivă

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \Rightarrow x = y \Rightarrow$ f injectivă

Pentru $x = 0 \Rightarrow$ $f(0) = \sqrt{f(f(0))} \Rightarrow f(0) = 0$

Pentru $x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) = \sqrt{f(f(1))} \Rightarrow 2 - f(1) \geq 0 \Rightarrow f(1) \leq 2$ şi cum $f(1) \neq f(0) \Rightarrow f(1) \in \{1,2\}$.

Dacă $f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt{f(f(1))} = 0 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = f(0) \Rightarrow 2 = 0$, fals. Deci, $f(1) = 1$ care verifică ipoteza.

Vom demonstra prin inducție că $f(n) = n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Avem $f(0) = 0$ şi presupunem că $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, \ldots, f(n) = n$.

Din injectivitate rezultă $f(n+1) \geq n+1$. Dacă $f(n+1) > n+1 \Rightarrow f(f(n+1)) \geq n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1 + \sqrt{n+1} = f(n+1) + \sqrt{f(f(n+1))} > n+1 + \sqrt{n+1}$, fals!

Rezultă $f(n+1) = n+1$ şi conform metodei inducției matematice rezultă că $f(n) = n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.