OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XI-A - Soluții

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(Z)$ cu proprietatea $A^3 = 2A + I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(R \setminus Q)$ cu proprietatea $A^3 = 2A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. $A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^3 = \operatorname{tr}(A) \cdot A^2 - \det(A) \cdot A = \operatorname{tr}(A)\left[\operatorname{tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2\right] - \det(A) \cdot A =$$

$$= \left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 \cdot A - \operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2 - \det(A) \cdot A = \left[\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A)\right] \cdot A - \operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2.$$

a) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A \in M_2(\square)$ cu $\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A) = 2$ și

$$\operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) = -1 \Rightarrow \det(A) = -\frac{1}{\operatorname{tr}(A)} \Rightarrow \left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{tr}(A)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tr}(A)\right)^3 - 2\operatorname{tr}(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\operatorname{tr}(A) - 1\right]\left[\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(A) - 1\right] = 0.$$

Dar $A \in M_2(Z) \Rightarrow \operatorname{tr}(A) \in Z \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 1$ şi $\det(A) = -1$.

Putem alege $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 + a - a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$ cu $a \in Z$ arbitrar.

Pentru a găsi toate matricele cu elemente numere naturale, din

$$\left[\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A)\right] \cdot A - \operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) \cdot I_2 = 2A + I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A) - 2\right] \cdot A = \left[\operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) + 1\right] \cdot I_2 \Rightarrow A = \alpha I_2, \text{ sau}$$

$$\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A) - 2 = \operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) + 1 = 0.$$

1. $A = \alpha I_2 \Rightarrow A^3 = \alpha^3 I_2 \Rightarrow \alpha^3 I_2 = 2\alpha I_2 + I_2 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2\alpha + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha \notin N.$$

2. $\left(\operatorname{tr}(A)\right)^2 - \det(A) - 2 = 0$ şi $\operatorname{tr}(A) \cdot \det(A) + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 1$ şi $\det(A) = -1$.

Deci $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a+d=1$ cu $a,d\in N \Rightarrow (a,d)\in\{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow ad=0 \Rightarrow bc=1$ cu

$b,c\in \mathbb{N} \Rightarrow (b,c)\in\{(1,1)\} \Rightarrow A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A\in M_2(R\setminus Q)$ cu $(\mathrm{tr}(A))^2-\det(A)=2$ şi $\mathrm{tr}(A)\cdot\det(A)=0$. Putem găsi A cu $\det(A)=0$ şi $\mathrm{tr}(A)=\sqrt{2}$, de exemplu

$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \sqrt{k} \\ \frac{1}{4\sqrt{k}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}$, unde $k\in N^*$ şi nu este pătrat perfect.

2. Considerăm o matrice $A\in M_3(R)$ care are următoarele proprietăţi:

(1) A şi A^3 au pe diagonala principală elementele $-1,0,1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1,0,1$ în această ordine.

Demonstraţi că A este singulară, dar are cel puţin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, Bucureşti

Soluţie. Considerăm $P=X^3-\mathrm{tr}(A)X^2+\mathrm{tr}(A^*)X-\det(A)$ polinomul caracteristic al matricei A. Din condiţiile din ipoteză deducem că A^k are pe diagonala principală elementele $(-1)^k$, 0^k, 1^k pentru $k=1,2,3$.

Cum $P(A)=O_3$ din relaţia Hamilton-Cayley, privind elementele de pe diagonală în această relaţie, deducem că $P(-1)=P(0)=P(1)=0$, adică $\det(A)=\mathrm{tr}(A)=0$ şi deci $P=X^3+\mathrm{tr}(A^*)X$. Din $P(1)=P(-1)=0$ rezultă că $\mathrm{tr}(A^*)=-1$. Atunci $A^*\neq O_3$, de unde deducem că A are cel puţin un minor de ordin 2 nenul, altfel $A^*=O_3$.

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+2}=x_{n+1}\cdot x_n^2$, $\forall n\geq 0$. Aflaţi termenul general x_n al şirului şi apoi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

Soluție. Se arată mai întâi inductiv că $x_n > 0,\ \forall n \geq 0,$ apoi se logaritmează relația de recurență şi se obține: $\ln x_{n+2} = \ln x_{n+1} + 2\ln x_n,\ \forall n \geq 0.$

Notăm $\ln x_n = y_n,\ \forall n \geq 0 \Rightarrow y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \Leftrightarrow y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0,\ \forall n \geq 0$ cu $y_0 = \ln 1 = 0$ şi $y_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$ Ecuația caracteristică a şirului are soluțiile -1 şi $2,$ deci $y_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n,\ \forall n \geq 0.$ Pentru $n = 0$ şi $n = 1,$ avem $c_1 + c_2 = 0$ şi

$$-c_1 + 2c_2 = -\ln 2 \Rightarrow 3c_2 = -\ln 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{1}{3}\left[(-1)^n - 2^n\right]\ln 2,\ \forall n \geq 0 \Leftrightarrow y_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \cdot \ln 2 \Leftrightarrow y_n = \ln 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}},\ \forall n \geq 0.$$

Dar $x_n = e^{y_n} \Rightarrow x_n = 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}},\ \forall n \geq 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2^{-\infty} = 0.$

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}}{\sqrt[3]{1 + \ln\left[x(2x-1)\right]} - \sqrt[3]{1 + \ln\left(x^3 - 4x + 4\right)}}.$

Iulian Danielescu, Brăila

Soluție. Amplificând cu conjugata obținem

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{\operatorname{arctg} x} + \sqrt{\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}} \cdot \right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt[3]{1 + \ln\left[x(2x-1)\right]}^2 + \sqrt[3]{1 + \ln\left[x(2x-1)\right]} \cdot \sqrt[3]{1 + \ln\left(x^3 - 4x + 4\right)} + \sqrt[3]{1 + \ln\left(x^3 - 4x + 4\right)}^2}{1 + \ln\left[x(2x-1)\right] - 1 - \ln\left(x^3 - 4x + 4\right)}\right] =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \cdot \lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sin\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} \cdot \right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sin(\operatorname{arctg}x)\cos\left(\arccos\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)-\cos(\operatorname{arctg}x)\sin\left(\arccos\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\ln\dfrac{2x^2-x}{x^3-4x+4}}\right]=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{4}}}{\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2x^2-x-x^3+4x-4}{x^3-4x+4}\right)}{\dfrac{-x^3+2x^2+3x-4}{x^3-4x+4}}\cdot\dfrac{-x^3+2x^2+3x-4}{x^3-4x+4}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{4}}\right)}{-x^3+2x^2+3x-4}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{2x^4}{4}-1+\dfrac{2x^2}{4}}{(x-1)\left(-x^2+x+4\right)}=\frac{3}{4\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^2-2}{2(x-1)}=$$

$$=\frac{3}{8\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^3+x^2+2x+2\right)}{2(x-1)}=\frac{3\cdot6}{8\sqrt{2\pi}}=\frac{9}{4\sqrt{2\pi}}.$$