INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 22.02.2015
CLASA a-X-a

1. Se dau relațiile

$$5\left[(x+y)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \quad (1)$$

şi

$$4^y=4y(3x+4). \quad (2)$$

a) Să se demonstreze că nu există $x, y\in(0,+\infty)$ care verifică relația (1).

b) Să se determine $x, y\in R$ care verifică simultan relațiile (1) şi (2).

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

2. Determinați perechile de numere complexe (u,v) cu $|u|=|v|=1$ astfel încât

$$|1-u|+\left|v^2+1\right|=|1-v|+\left|u^2+1\right|=\sqrt{2}.$$

Marius Damian, profesor, Brăila

3. Fie $m,n\in N\cap[2,+\infty)$ şi $x_1,x_2,x_3,x_4\in[0,+\infty)$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=4$.

a) Demonstrați că $\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+\sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3}+\sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4}+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\le 4.$

b) Când are loc egalitatea la a)?

Gheorghe Alexe, profesor, Brăila

4. Să se determine toate funcțiile $f:N\to N$ care îndeplinesc condiția:

$$x+\sqrt{x}-f(x)=\sqrt{f(f(x))},\ \forall x\in N.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Notă:
1.Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2.Timpul efectiv de lucru este de trei ore.