INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 22.02.2015

CLASA a-XI-a

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(Z)$ cu proprietatea $A^3 = 2A + I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A \in M_2(R \setminus Q)$ cu proprietatea $A^3 = 2A$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

2. Considerăm o matrice $A \in M_3(R)$ care are următoarele proprietăți:

(1) A şi A^3 au pe diagonala principală elementele $-1, 0, 1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1, 0, 1$ în această ordine.

Demonstrați că A este singulară, dar are cel puțin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, profesor, Bucureşti

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ şi $x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n^2$, $\forall n \geq 0$. Aflați termenul general x_n al şirului şi apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Alexandru Gabriel Mîrşanu, profesor, Iaşi

4. Să se calculeze $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}}{\sqrt[3]{1+\ln\left[x(2x-1)\right]} - \sqrt[3]{1+\ln\left(x^3-4x+4\right)}}$.

Iulian Danielescu, profesor, Brăila

Notă:
1.Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2.Timpul efectiv de lucru este de trei ore.