

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a IX-a

1. Verificați că numărul $7^{20} - 1$ este divizibil cu 10^3 și determinați ultimele trei cifre ale numărului 7^{2015} .

Marin Marin

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x + 2015] - \left[\frac{5x - 2015}{2} \right] = \frac{x}{2} + 2015,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Ioana Mașca

3. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA} + (c+a)\overrightarrow{PB} + (a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde punctul $P \in \{O, I, G\}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral. (Notațiile sunt cele uzuale).

Gazeta Matematică - Supliment cu exerciții, octombrie 2014.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\frac{x - a_1}{a_2 + \dots + a_n} + \frac{x - a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{x - a_n}{a_1 + \dots + a_{n-1}} = \frac{nx}{a_1 + \dots + a_n},$$

unde $n \geq 2$ și $a_i > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Florica Zubașcu-Andreica

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a X-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ şi $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.
 - (a) Demonstraţi că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.
 - (b) Demonstraţi că $|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

Gazeta Matematică 12/2014

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{1}{4^x + 1} + \frac{1}{2^x \cdot 3^x - 1} = \frac{2^x}{4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x}.$$

Marin Marin

3. Rezolvaţi ecuaţia $[\log_{2015}[\log_{2015} x]] = 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Ioana Maşca

4. Determinaţi valorile reale x, y, z , pentru care

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x. \end{cases}$$

Sorina Stoian

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Şirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ şi $(y_n)_{n \geq 0}$ de numere reale sunt definite prin $x_0 = y_0 = 1$ şi

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Să se arate că $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$ şi $y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0$, pentru orice $n \geq 0$. Să se demonstreze că ecuaţia $x^2 - 5y^2 = -4$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică 11/2014

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $\det(A + mI_n) = m^n \det(A + \frac{1}{m}I_n)$, pentru oricare $m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n . Să se arate că $\det(A) = 1$.

Marin Marin

3. (a) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, unde ω este o rădăcină de ordinul 3 a unităţii, diferită de 1. Să se determine A^{2015} .

- (b) Să se arate că ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu are soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dar admite soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Ioana Maşca

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$, unde

$$a_n = \sqrt{2015^2 x_1^2 + 2015 x_1 x_2 + x_2^2} + \sqrt{2015^2 x_2^2 + 2015 x_2 x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{2015^2 x_n^2 + 2015 x_n x_1 + x_1^2}.$$

Florica Zubaşcu-Andreica

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_9$, $f(x) = x^9$. Să se determine submulțimile nevide A ale mulțimii \mathbb{Z}_9 cu proprietatea $f(A) = A$.

Gazeta Matematică 9/2014

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și două elemente fixate $a, b \in A$ cu proprietățile $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ și $(a+b)^3 = a^3 + b^3$. Să se arate că $(a+b)^n = a^n + b^n$, pentru orice număr natural nenul n .

Marin Marin

3. Determinați primitiva $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a funcției $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{e^{2x} + \sin^2 x},$$

pentru care $F(0) = 0$.

Ioana Mașca

4. Să se calculeze

$$\int \frac{2x + 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a} dx,$$

unde $a \geq 1$.

Sorina Stoian

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.