

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”
ANUL ȘCOLAR 2014-2015
Clasa a IX-a
Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii
Brașov
28 februarie 2015

1. Rezolvați în $R \times R$ ecuația $x^2 - 2x + 2xy - 2y + y^2 = 3$.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

2. Fie ABC un triunghi oarecare, D mijlocul laturii (BC) , E mijlocul laturii (AC) , F mijlocul laturii (AB) , iar G_1 , G_2 , G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BFD , AFE , respectiv DEC și G centrul de greutate al triunghiului ABC . Calculați $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3}$.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

3. Să se calculeze următoarea sumă, iar apoi să se demonstreze rezultatul obținut prin inducție matematică :

$$S = 1 + 2 \cdot (1 + 2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3) + \dots + n \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Sorina Stoian

4. Se consideră șirul cu termenul general $b_n = 5^n \cdot 2^{2-n}$.

a) Arătați că $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică.

b) Aflați numărul natural nenul n pentru care $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1015}{4}$.

Zubașcu-Andreica Florica

Notă:

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”
ANUL ȘCOLAR 2014-2015
Clasa a X-a
Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii
Brașov
28 februarie 2015

1. Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare: $a = \log_9 6$ sau $b = \log_{12} 8$.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

2. Arătați că dacă numerele complexe z_1, z_2 sunt de modul 1, atunci numărul $\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2}$ este real.

3. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$.

Aurel Aldea

4. Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (3 - 2\sqrt{2})^x + 1 \leq 6(\sqrt{2} - 1)^x\right\}$.

Sorina Stoian

Notă:

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”
ANUL ȘCOLAR 2014-2015
Clasa a XI-a
Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii
Brașov
28 februarie 2015

1. Determinați parametrul real a , $a > 0$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(1-a)^2 n^2 + 1}}{5an + \frac{1}{2^n}} > 3$.

2. a) Determinați mulțimea $A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 - \sqrt{ax^2 + x + 3} \right) \right\}$.

b) Pentru $a = 1$, determinați $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 3} \right)$.

3. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a, b, c , $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$.

b) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde cu a, b, c se notează lungimile

laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului. Arătați că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

4. Fie matricea $A \in M_2(R)$ pentru care avem $\det(A - 3I_2) = -2$ și $\det(A + 3I_2) = 22$. Să se demonstreze $A^2 = 4A - I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aurel Aldea

Notă: -Timp de lucru 3 ore.

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”
ANUL ȘCOLAR 2014-2015
Clasa a XII-a
Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii
Brașov
28 februarie 2015

1. Se dau funcțiile $f, g : R \rightarrow R$, $f(x) = x$ și $g(x) = xe^{2-x}$.
- a) Să se demonstreze că funcția $h : [0,4] \rightarrow R$, $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ admite primitive.
- b) Să se determine primitiva funcției h , al cărei grafic trece prin punctul $A\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right)$.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciții.

2. Fie $f, F : (-1,1) \rightarrow R$, cu $f(x) = \sqrt{1-x^2}(2x^2+x)$ și $F(x) = \sqrt{1-x^2}u(x) + m \cdot \arcsin x$.
Determinați $m \in R$ și funcția polinomială $u : R \rightarrow R$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f .

3. Fie $M = \{2, 4, 8, 16\}$ și legea de compoziție $x \circ y = \begin{cases} y + |x - y|[\log_x y], & y \in \{2, 4\} \\ x - (x - y)[\log_y x], & y \in \{8, 16\} \end{cases}$,

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Arătați că M este parte stabilă în raport cu operația de mai sus și stabiliți proprietățile acestei legi.

4. Pe $G = (0,1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a) Determinați a , astfel încât funcția $f : G \rightarrow R_+^*$, $f(x) = \frac{1-ax}{x}$ să fie izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (R_+^*, \cdot) .

b) Calculați $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2015}$.

Notă: - Timp de lucru 3 ore.

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7.