OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Arătaţi că oricum se aleg 2015 numere reale din intervalul $\left(1,\ 2^{1007}\right)$, distincte două câte două, există printre ele trei numere care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = 2015$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătați că $[a_n] = 2015 - n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq 1008$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Dacă ABC este un triunghi oarecare și D, M, P puncte cu proprietățile $D \in (AB)$, $M \in (BC)$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{5}\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, demonstrați că $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 4. Se numerotează vârfurile unui cub *ABCDEFGH* cu câte un număr natural de la 1 la 8, astfel încât oricăror două vârfuri distincte să li se atribuie numere diferite. Se atribuie fiecărei muchii numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Există o numerotare a vârfurilor pentru care numerele atribuite muchiilor sunt distincte două câte două? Justificaţi răspunsul!

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Arătaţi că:

a) Orice număr natural de patru cifre, de forma $\overline{abcd}$, cu proprietatea: $\lg\overline{abcd}-\lg\overline{abc}=1$, este divizibil cu 10.

b) $[\log_2 2015]=[\log_3 2015]+[\log_5 2015]$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $5^x+13^x+31^x=3\cdot 2015^{\frac{x}{3}}$;

b) $x\left(6+2\sqrt{5}\right)^{\lg x}+1=2\left(\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)^{\lg x}$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 3. Fie a şi b două numere reale diferite de zero. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\sin x+b\sin\left(x\sqrt{5}\right)$, nu este periodică.

Problema 4. Fie numerele complexe a, b, c, d, α astfel încât $|a|=|b|\neq 0$ şi $|c|=|d|\neq 0$. Demonstrați că, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, toate rădăcinile ecuației $c\left(bx+a\alpha\right)^n-d\left(ax+b\overline{\alpha}\right)^n=0$ sunt numere reale.

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 2. a)** 3 puncte; **b)** 4 puncte. **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} > 0$, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$. Arătaţi că, dacă produsul dintre suma elementelor aflate pe linia i, cu suma elementelor aflate pe coloana j este egal cu a_{ij}, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$, atunci suma tuturor elementelor matricei A este egală cu 1.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2. Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care au proprietăţile:

i. $\det X = 0$;

ii. $X^3 - 6X^2 + 12X = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+2^k} = 0$.

Problema 4. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia $g : [a, a+1) \to [a, a+1)$, $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a$. Să se determine toate funcțiile $f : [a, a+1) \to \mathbb{R}$ care au proprietățile:

i. $f(x) - g(x) - 2(f \circ g)(x) + (f \circ g \circ g)(x) = a - 2x + \sqrt{x-a}$, $\forall x \in [a, a+1)$;

ii. funcția f este continuă în $x = a$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călăraşi, Jud. Călăraşi
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit. Arătați că:

a) Dacă grupul $(G,\cdot)$ are cel puțin un element de ordin doi, $\prod_{x\in G} x = \prod_{x\in G,\ ord x=2} x$.

b) Spunem că un subgrup H al lui G are proprietatea (P) dacă $H \neq G$ și $\prod_{x\in H} x = \prod_{x\in G\setminus H} x$. Demonstrați că dacă H este un subgrup al lui G care are proprietatea (P), atunci orice subgrup a lui H, diferit de H, are proprietatea (P).

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup și funcția $f: G\to G,\ f(x)=x^2$. Dacă f este morfism arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Problema 3. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $I_n = \int_0^1 \frac{x^n+nx+1}{x+1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că : $I_n < 1 + n\ln\frac{e}{2}$

b) Calculați : $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(I_n+I_{n+1})$

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 4. Determinați mulțimea M a funcțiilor continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, care admit o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $F(-x)=\frac{x}{f(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3. a**) 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.