



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1.

$$a^x \log_a x = b^x \frac{\log_a x}{\log_a b} \Leftrightarrow x = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Sau

$$a^x = \frac{b^x}{\log_a b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \log_b a$$

$$x = \log_{\frac{a}{b}} (\log_b a) \in (0; +\infty) \dots\dots\dots 5p$$

Subiectul 2.

Evident $x > 0$ 1p

Din $x^2 - x - a > 0$, $(\forall)x \in R$, $(\Delta = 1 + 4a < 0)$ 2p

$$x^2 > x + a \Rightarrow \sqrt{x+a} < x$$

$$\text{Dacă } x \rightarrow \sqrt{x+a}, \sqrt{a+\sqrt{x+a}} < \sqrt{x+a} < x$$

$$\text{Deci } \sqrt{a+\sqrt{x+a}} < x, \dots\dots\dots 4p$$

Subiectul 3.

a) Fie $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow 2015f(a) - 2104a = 2015f(b) - 2104b \Rightarrow -2104a = -2104b \Rightarrow a = b$, deci injectivitatea 1p

b) Funcția f este injectivă iar mulțimea A este finită deci funcția este bijectivă. 1p

$$f(x) = \frac{f(f(x)) + 2014x}{2015} \Rightarrow f(x) \leq \max\{x, f(f(x))\}, \forall x \in A \text{ (1)} \dots\dots\dots 1p$$

Presupunem că $f(a) = \max_{\substack{A \\ \text{notăm}}} m \Rightarrow f(a) \geq a$. Din (1) avem că $f(a) \leq \max\{a, f(f(a))\}$, deci
 $m \leq \max\{a, f(f(a))\} \Rightarrow m = a \text{ sau } m = f(f(a))$. Dacă $m = f(f(a)) \Rightarrow f(a) = f(f(a)) \Rightarrow a = f(a)$.

Așadar avem că $f(a) = a$ 2p

Analog $f(x) = x, \forall x \in A$ 1p

Subiectul 4.

a) Folosim $u \cdot \bar{u} = |u|^2$ și deducem că

$$|z - z_1|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = (z - z_1)(\overline{z - z_1}) + \dots + (z - z_n)(\overline{z - z_n}) = \dots\dots\dots 1p$$

$$= |z|^2 - \bar{z} \cdot z_1 - z \cdot \bar{z}_1 + |z_1|^2 + \dots + |z|^2 - \bar{z} \cdot z_n - z \cdot \bar{z}_n + |z_n|^2 = \dots\dots\dots 1p$$

$$= n|z|^2 + n - z \cdot \underbrace{\left(\overline{z_1 + \dots + z_n}\right)}_0 - \bar{z} \cdot \underbrace{\left(z_1 + \dots + z_n\right)}_0 = n|z|^2 + n \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{b) } (1 \cdot |z - z_1| + \dots + 1 \cdot |z - z_n|)^2 \leq n(|z - z_1|^2 + \dots + |z - z_n|^2) = n(n|z|^2 + n) \leq 2n^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{deci } |z - z_1| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.