CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanţa, 15.02.2015

Clasa a XI-a

filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Barem de corectare şi notare

SUBIECTUL 1.

a)Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$. Atunci, $A\cdot X=X\cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -3x+2z & -3y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3y & 2y \\ 2z-3t & 2t\end{pmatrix}$, ………… **2p**

de unde găsim $\begin{cases} 2x=2x-3y \\ -3x+2z=2z-3t \\ -3y+2t=2t\end{cases}$, cu soluţiile $\begin{cases} y=0 \\ x=t \\ z\in R\end{cases}$. Deci, $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x\end{pmatrix}$. …………………….…….. **1p**

b) Înmulţim, pe rând, la dreapta şi la stânga ecuaţia cu X şi obţinem $X^4-3X^2=A\cdot X$, $X^4-3X^2=X\cdot A$

Deci, $A\cdot X=X\cdot A$ şi, conform a), $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x\end{pmatrix}$. ………………………………….. **1p**

Avem $X^3=\begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2z & x^3\end{pmatrix}$, iar ecuaţia devine $\begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2z & x^3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2\end{pmatrix}$, de unde rezultă

$\begin{cases} x^3-3x=2 \\ 3x^2z-3z=-3\end{cases}$. ……………..**1p**; Rezolvând, găsim $\begin{cases} (x+1)(x^2-x-2)=0 \\ z(x-1)(x+1)=-1\end{cases}$ cu soluţia $(x,z)=\left(2,-\frac{1}{3}\right)$.

Prin urmare, $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}$ ……………………………………………………......**2p**

SUBIECTUL 2.

a)Demonstrarea egalităţii...**2p**

b) $B=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=3A$.......................**2p**

c) $A_\Delta=\frac{1}{2}|B|=\frac{3}{2}\cdot|A|=\frac{3}{2}\cdot|(b-a)(a-c)(b-c)(a+b+c)|$ **1p**

Dacă a,b,c dau acelaşi rest la împărțirea cu 3, atunci diferența a două dintre acestea este un număr divizibil cu 3. Dacă a,b,c dau resturi diferite la împărțirea cu 3, atunci $a+b+c$ este un număr divizibil cu 3............**1p**

Dacă cel puțin două dintre a,b,c au aceeaşi paritate, atunci diferența a două dintre ele este divizibilă cu 2.

Deci, aria este un număr natural, divizibil cu3...**1p**

SUBIECTUL 3

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$ **1p**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+2x+1\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}=\frac{1}{3}$$ ………………………………**2p**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\infty\cdot(2-a)$……………………………**1p**

Dacă $a\neq 2$, limita este $\pm\infty$ imposibil

Dacă $a=2$, avem cazul de nedeterminare $\infty\cdot 0$ ……………………………………………**1p**

În acest caz, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x+\sqrt{x^2+x+1}-x-b\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-b=\frac{5}{6}-b$

și $b=-\frac{7}{6}$ ………………………………………………………………………………**2p**

SUBIECTUL 4

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt[3]{\frac{2^x+3^x+4^x}{3}}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt[3]{\frac{2^x+3^x+4^x}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=$ …..**1p**; $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\frac{\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}+\frac{4^x-1}{x}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{2^x+3^x+4^x}{3}}+1}}$ .....**1p;** $=e^{\frac{1}{9}\ln 24}=\sqrt[9]{24}$ ..**1p**

b) $D_f=R\Rightarrow f$ nu are asimptote verticale......**1p**; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\Rightarrow f$ nu are asimptote orizontale.......**1p;** $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)}=0$

$\Rightarrow y=x$ asimptotă oblică spre $+\infty$ **1p**

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ și $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2-x\sqrt{x^2+1}\right)}=0\Rightarrow y=-x$ asimptotă oblică spre $-\infty$..........**1p**