OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1.

Notăm $f(x)=\det\left(A+xA^t\right)\Rightarrow f(x)=x^2\det(A^t)+mx+\det(A)=x^2\det(A)+mx+\det(A)$ **3p**

$\det(A+A^t)=8\Rightarrow f(1)=8$ și $\det(A+2A^t)=27\Rightarrow f(2)=27$ **2p**

$2\det(A)+m=8,\ 5\det(A)+2m=27\Rightarrow \det(A)=11$ **2p**

Subiectul 2.

A inversabila $\Rightarrow A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3\Rightarrow \det A\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1$

$\det A=1\Rightarrow \det\left(A^{-1}\right)=1$

$\det(A+I_3)=\det(A-I_3)\Leftrightarrow \det\left(A+A\cdot A^{-1}\right)=\det\left(A-A\cdot A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det A\cdot\det\left(I_3+A^{-1}\right)=$

$=\det A\cdot\det\left(I_3-A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det\left(I_3+A^{-1}\right)=\det\left(I_3-A^{-1}\right)\Leftrightarrow \det\left(I_3+A^{-1}\right)+\det\left(-I_3+A^{-1}\right)=0$

.... **2p**

Consideram $P(X)=\det\left(X\cdot I_3+A^{-1}\right)=X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$, unde

$c_2=tr\left(A^{-1}\right)$, $c_0=P(0)=\det\left(A^{-1}\right)=1$ **3p**

$P(1)+P(-1)=\det\left(I_3+A^{-1}\right)+\det\left(-I_3+A^{-1}\right)=0\Leftrightarrow 2(c_2+c_0)=0\Leftrightarrow c_2=-c_0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tr\left(A^{-1}\right)=-1$

.... **2p**

Subiectul 3.

a) $x_k\in(0,1)$, $\forall\, k\geq 1$ (prin inducție)

$\frac{x_{k+1}}{x_k}=1-x_k<1 \Rightarrow (x_n)\downarrow \Rightarrow (x_n)_n$ convergent. **1p**

Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $l\in[0,x_1)\Rightarrow l=l-l^2\Rightarrow l=0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ **1p**

$x_n^2=x_n-x_{n+1}$, $\forall\, n\geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2=x_1-x_2\\ x_2^2=x_2-x_3\\ \vdots\\ x_n^2=x_n-x_{n+1}\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} y_n=x_1-x_{n+1},\ \forall\, n\geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}y_n=x_1$$ **2p**

b) $n\cdot(x_1-y_n)=\frac{n}{\frac{1}{x_1-y_n}}=\frac{a_n}{b_n}$, unde $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{x_1-y_n}$, $b_n\uparrow\infty$. **1p**

Atunci conform criteriului Stolz – Cesaro avem:

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot(x_1-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_1-y_{n+1}}-\frac{1}{x_1-y_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1-y_n)\cdot(x_1-y_{n+1})}{y_{n+1}-y_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}\cdot x_{n+2}}{x_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n+1})$$ **2p**

Subiectul 4.

a) Prin inducție matematică se arată că $x_n > 0,\ \forall n \geq 1$ și de aici $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+nx_n^2}} < 1 \Rightarrow$ șir strict descrescător, așadar convergent. **2p**

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \geq 0$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $L > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{1+nx_n^2}} = 0 \Rightarrow L = 0$, contradicție. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **1p**

b) $(n+1)x_{n+1} - nx_n = \cdots = \dfrac{nx_n\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n}} - nx_n\right)\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n}} + nx_n\right)}{\sqrt{1+nx_n^2}\cdot\left(n+1+n\sqrt{1+nx_n^2}\right)}$ **(1)**

Arătăm, prin inducție matematică, că $nx_n > \sqrt{\frac{2n+1}{n}},\ \forall n \geq 1$. **(2)**

$n=1:\ x_1 > \sqrt{3}$, adevărat.

Presupunem $nx_n > \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$ și demonstrăm că $(n+1)x_{n+1} > \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}}$.

$$(n+1)x_{n+1} - \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}} = \cdots = \frac{n^3+n^2+1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n+1)x_{n+1} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}}}\cdot\left(nx_n + \sqrt{\frac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}\right)\left(nx_n - \sqrt{\frac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}\right)$$

Cum $nx_n > \sqrt{\frac{2n+1}{n}} > \sqrt{\frac{2n^3+3n^2}{n^3+n^2+1}}$ (calcul!) $\Rightarrow (n+1)x_{n+1} > \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}} \Rightarrow$ **(2)**. Din (1) și (2) rezultă că $(nx_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător iar din pozitivitate avem că este convergent.................................... **2p**

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = a \geq 0$.

Din (a), șirul $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$ și este strict crescător. Cum $nx_n = \dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}$, cu criteriul Stolz-Cesaro avem

$$\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n}{\sqrt{1+nx_n^2}-1} = \frac{\sqrt{1+nx_n^2}+1}{nx_n} \to \begin{cases} +\infty, & a = 0 \\ \frac{2}{a}, & a > 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = a \Rightarrow a = \frac{2}{a},\ a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ **2p**

<u>**Notă**</u> **: Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .**