OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XII-a

<u>Barem de corectare și notare</u>

Subiectul 1.

Se demonstrează că $(R^*, *)$ este grup necomutativ...**3p**

i) Asociativitate:

Caz I: x > 0, se demonstrează că $(x \cdot y) * z = x \cdot (y * z)$. Dacă $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0 \Rightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, adevărat.

Dacă $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0 \Rightarrow \frac{x \cdot y}{z} = x \cdot \frac{y}{z}$, adevărat.

Caz II: x < 0 se demonstrează că $\frac{x}{y} * z = \frac{x}{y * z}$. Dacă y > 0, $\frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \frac{x}{yz} = \frac{x}{y \cdot z}$, adevărat. Dacă y < 0,

$\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot z = \frac{x}{\frac{y}{z}} \Leftrightarrow \frac{x \cdot z}{y} = \frac{xz}{y}$, adevărat.

ii) Observăm că 1 este element neutru: $x * 1 = 1 * x = x, \forall x \in R^*$

iii) Dacă $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x}$ este simetricul lui x, iar pentru x < 0, simetricul lui x este x.

iv) Din $2 * (-2) \neq (-2) * 2 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) \neq \frac{-2}{2} \Rightarrow (R^*, *)$ grup necomutativ.

Se demonstrează că $(G, \circ)$ este grup necomutativ...**3p**

i) Asociativitate: Dacă $x > 1 \Rightarrow x^{\ln y} \circ z = x^{\ln(y \circ z)}$. Caz I: $y \in (0,1) \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow x^{\ln y} < 1$

$\Rightarrow (x^{\ln y})^{\frac{1}{\ln z}} = x^{\ln\left(y^{\frac{1}{\ln z}}\right)} \Leftrightarrow x^{\frac{\ln y}{\ln z}} = x^{\frac{\ln y}{\ln z}}$. Caz II: $y > 1 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow x^{\ln y} > 1 \Rightarrow (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln(y^{\ln z})} \Leftrightarrow x^{\ln y \cdot \ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$.

Dacă $x \in (0,1)$ demonstram că $x^{\frac{1}{\ln y}} \circ z = x^{\frac{1}{\ln(y \circ z)}}$. Caz I: $y \in (0,1) \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow x^{\ln y} > 1 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{\ln y}}\right)^{\ln z} = x^{\frac{1}{\ln\left(y^{\frac{1}{\ln z}}\right)}}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{\ln z}{\ln y}} = x^{\frac{\ln z}{\ln y}}$. Caz II: $y > 1 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{\ln y}} < 1 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{\ln y}}\right)^{\frac{1}{\ln z}} = x^{\frac{1}{\ln(y^{\ln z})}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{\ln y \cdot \ln z}} = x^{\frac{1}{\ln y \cdot \ln z}}$.

ii) $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G \Rightarrow$ e este element neutru

iii) Dacă $x > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln x}}$ este simetricul lui x, iar dacă $x \in (0,1) \Rightarrow$ x este simetricul lui x.

iv) $2 \circ \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \circ 2 \Leftrightarrow 2^{\ln\frac{1}{2}} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\ln 2}}$.

Demonstrăm că $f : R^* \to (0, \infty) - \{1\}$, $f(x) = e^x$ izomorfism de grupuri...**1p**

f evident bijectivă. Caz I: $x > 0 \Rightarrow f(xy) = (e^x)^{\ln e^y} \Leftrightarrow e^{xy} = e^{xy}$. Caz II: $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = (e^x)^{\frac{1}{\ln(e^y)}} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}}$

$\Rightarrow f(x * y) = f(x) \circ f(y) \Rightarrow$ f izomorfism de grupuri.

Subiectul 2.

$f_a(x\cdot a)=a^n\cdot x,\ \forall x\in G$.

Înlocuind x cu $xa^{-1}\Rightarrow f_a(x)=a^n\cdot x\cdot a^{-1},\ \forall x\in G$ ($x\to xa^{-1}$ este bijecție!) **1p**

$"\Rightarrow"\ f_a(xy)=f_a(x)f_a(y)\Rightarrow a^n xya^{-1}=a^n xa^{-1}a^n ya^{-1}\Rightarrow e=a^{n-1}$ **2p**

$"\Leftarrow"\ a^{n-1}=e\Rightarrow a^n=a\Rightarrow f_a(x)=axa^{-1}$ **1p**

$f_a(xy)=axya^{-1}=axa^{-1}aya^{-1}=f_a(x)f_a(y)$, deci morfism.. **1p**

$f_a(x_1)=f_a(x_2)\Rightarrow ax_1a^{-1}=ax_2a^{-1}\Rightarrow x_1=x_2$, deci injectivă... **1p**

Fie $y\in G\Rightarrow f_a(a^{-1}ya)=a(a^{-1}ya)a^{-1}=y$, deci surjectivă... **1p**

Subiectul 3.

I+J= $\int\left(\frac{\sin 7x}{\sin x}+\frac{\cos 7x}{\cos x}\right)dx=\int\frac{\sin 8x}{\sin x\cos x}dx=2\int\frac{\sin 8x}{\sin 2x}dx=2\int\frac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 2x}dx=4\int 2\cos 2x\cos 4x dx=$

$=8\int\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2}dx=4\frac{\sin 6x}{6}+4\frac{\sin 2x}{2}=\frac{2}{3}\sin 6x+2\sin 2x+C$ (1)..............**3p**

I – J = $\int\left(\frac{\sin 7x}{\sin x}-\frac{\cos 7x}{\cos x}\right)dx=\int\frac{\sin 6x}{\sin x\cos x}dx=2\int\frac{\sin 6x}{\sin 2x}dx=2\int\frac{3\sin 2x-4sin^3 2x}{\sin 2x}dx=2\int 3-4sin^2 2x\,dx=$

$=6x-8\int sin^2 2x\ dx=6x-8\int\frac{1-cos4x}{2}dx=2x+sin4x+C$ (2)................**3p**

Din (1) și (2) rezultă că I=$\frac{1}{3}\sin 6x+\sin 2x+x+\frac{1}{2}\sin 4x+C$ și J=$\frac{1}{3}\sin 6x+\sin 2x-x-\frac{1}{2}\sin 4x+C$..........**1p**

Subiectul 4.

Avem $\left(x^2F\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=2xF\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right),\ \forall x\neq 0$ **(1)**.. **1p**

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}xF\left(\frac{1}{x}\right)$ și $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}xF\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}xF\left(\frac{1}{x}\right)=a$ **(2)** **1p**

Considerăm $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ h(x)=\begin{cases}2xF\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0\\ 2a,\ x=0\end{cases}$ care, din (2), este continuă, deci admite o primitivă notată *H*.

.... **1p**

Din (1) avem $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(H(x)-x^2F\left(\frac{1}{x}\right)\right)',\ \forall x\neq 0$.

$G:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ G(x)=\begin{cases}H(x)-x^2F\left(\frac{1}{x}\right)+k_1,\ x<0\\ k_2,\ x=0\\ H(x)-x^2F\left(\frac{1}{x}\right)+k_3,\ x>0\end{cases}$ verifică $G'(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbf{R}^*$ **1p**

Din continuitate $\Rightarrow k_1=k_3,\ H(0)+k_1=k_2$

Deci $G(x)=\begin{cases}H(x)-x^2F\left(\frac{1}{x}\right)+k_1,\ x\neq 0\\ H(0)+k_1,\ x=0\end{cases}$ este continuă.. **1p**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{H(x)-H(0)}{x-0}-xF\left(\frac{1}{x}\right)\right)=H'(0)-a=h(0)-a=2a-a=a\Rightarrow G'(0)=a$ ... **1p**

Deci *g* admite primitive dacă și numai dacă $G'(0)=g(0)\Leftrightarrow a=\alpha$ **1p**

<u>**Notă**</u> **: Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.**