OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1.

Rezolvați în $(0;+\infty)$ ecuația $a^x \cdot \log_a x = b^x \cdot \log_b x$, unde $a > b > 1$.

***

SUBIECTUL 2.

Fie $a \in R$, $a < \frac{1}{4}$. Arătați că ecuația $\sqrt{a+\sqrt{x+a}} = x$ nu are soluții în *R*.

Dorin Arventiev

SUBIECTUL 3.

Fie A o mulțime nevidă și finită de numere reale și $f : A \to A$ o funcție cu proprietatea $(f \circ f)(x) = 2015 \cdot f(x) - 2014 \cdot x, (\forall) x \in A$.

a) Arătați că funcția *f* este injectivă;
b) Determinați funcția *f*.

***

SUBIECTUL 4.

Fie $n \in N, n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, ..., z_n \in C$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n \cdot |z|^2 + n$ pentru orice $z \in C$.

b) Demonstrați că $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$ pentru orice $z \in C$, $|z| \leq 1$.

GMB

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu