OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1.

Pe R^* considerăm legea: $x * y = \begin{cases} x \cdot y, & x > 0 \\ \dfrac{x}{y}, & x < 0 \end{cases}$. Pe $G = (0,\infty) - \{1\}$ considerăm legea: $x \circ y = \begin{cases} x^{\ln y}, & x > 1 \\ x^{\frac{1}{\ln y}}, & 0 < x < 1 \end{cases}$.

Demonstrați că $(R^*, *)$ și $(G, \circ)$ sunt grupuri necomutative izomorfe între ele.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 2.

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e. Pentru $a \in G$ și $n \in N$, $n \geq 2$ definim $f_a : G \to G$ astfel încât $f_a(x \cdot a) = a^n \cdot x$, $\forall x \in G$, unde $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{\text{de n ori}}$. Arătați că f_a este automorfism de grupuri dacă și numai dacă $a^{n-1} = e$.

***

SUBIECTUL 3.

Calculați:

a) $\int \frac{\sin 7x}{\sin x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\int \frac{\cos 7x}{\cos x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Cristina Homentcovschi

SUBIECTUL 4.

Fie $f : R \to R$ o funcție care admite primitive și are proprietatea că $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = a$, $a \in R$, unde F este o primitivă a lui f. Să se demonstreze că funcția $g : R \to R$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive dacă și numai dacă $\alpha = a$.

GMB

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.