

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ****ETAPA LOCALĂ****28 februarie 2015****CLASA A IX-A**

- 1.) Să se demonstreze că oricare ar fi  $a, b, c \in R_+^*$ , sunt adevărate următoarele inegalități:

a)  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

b)  $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$

- 2.) Se consideră numărul  $y_n = \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 3} + \frac{15}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 - n + 3}{(n-1) \cdot n}$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Pentru  $n \geq 4$

să se calculeze  $[y_n]$  și  $\{y_n\}$ .

- 3.) Se dă triunghiul  $ABC$  în care  $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$  și punctele  $M \in BC$ ,  $N \in AC$  și  $P \in AB$  care satisfac condițiile:  $(BM) \equiv (MC)$ ,  $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle CBN$ ,  $AM \cap BN = \{S\}$ ,  $CS \cap AB = \{P\}$ .  
Să se calculeze raportul ariilor triunghiurilor  $SNP$  și  $SBC$ .

- 4.) Se dă șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  astfel încât  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$ . Dacă  $b_n = \frac{a_n}{n}$ ,  
demonstrați că  $(b_n)_{n \geq 1}$  este o progresie aritmetică.

**Notă:**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.**

**Timp de lucru 3 ore**