OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A XI-A

1.) Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$ și să se calculeze suma $S = \sum_{k=0}^{2015} A^k$.

2.) Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n = 3a_{n+1} + 4$ și $a_1 = 0$, iar șirul $b_n = a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) b_n$.

3.) Să se calculeze limita $L = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to 0} (1 + \sin x + 2\sin 2x + \ldots + n \sin nx)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{n^3}}$.

4.) Se consideră șirul de numere reale $a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a, b \in (0, \infty)$ cu termenii a_1, a_2, a_3 în progresie algebrică, cu temenii a_2, a_3, a_4 în progresie geometrică, cu termenii a_3, a_4, a_5 în progresie algebrică, cu termenii a_4, a_5, a_6 în progresie geometrică și așa mai departe.
a) Să se determine formula termenului general al șirului.
b) Să se calculeze valoarea lui a și b pentru care $\lim_{n\to\infty} \left(a_{2n} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n \right) = \frac{4}{3}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore