OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A XII-A

1.) **a)** Pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ definim operaţia "$\circ$" astfel: $a \circ b = c =$ cel mai mare număr natural pentru care există triunghi cu lungimile laturilor a, b, c. Să se studieze proprietăţile operaţiei "$\circ$" (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

b) Pe mulţimea $H = \{1,2,3,4,5\}$ definim operaţia "$*$" astfel: $a * b = c =$ cel mai mic număr natural pentru care există triunghi cu lungimile laturilor a, b, c. Să se efectueze tabela operației.

2.) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x$.

a) Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

b) Dacă $x_0 = f^{-1}(0)$ arătați că $(G, *)$ este un grup abelian, unde $G = \mathbb{R} / \{x_0\}$, și

$x * y = f^{-1}\left(2f(x) \cdot f(y)\right),\ \forall x, y \in G$

3.) Se consideră funcţia $f : R \to R,\ f(x) = \left(4x^3 - 6x^2 + 6x - 2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2 - x + 1\right)$. Să se determine acea primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f al cărei grafic trece prin punctul $A(1,\ 0)$.

4.) Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(0) = 1$ și există $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivă a funcţiei f astfel încât $F(x) - f(x) = \sin^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore