

Olimpiada de matematică – clasa a VI-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Să se arate că fracția $\frac{13 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2013})}{2^{n+11} - 2^{n+5} - 2^n}$ se simplifică prin 2015, oricare ar fi n număr natural.
2. Andrei merge la dans în fiecare a doua zi, Bernadett din cinci în cinci zile iar Ana din 9 în 9 zile, în același loc. Astăzi este miercuri și toți trei sunt la dans.
 - a) În ce zi vor fi iarăși toți trei la dans la următoarea ocazie?
 - b) Este posibil ca într-un singur an să meargă toți trei la dans în două zile de miercuri?
3. AOB este un unghi de măsură mai mică decât un unghi dreptunghic. Prelungim latura $[OA]$ cu semidreapta $[OE]$. Pe același parte a dreptei OB luăm semidreptele $[OC]$ și $[OD]$ astfel încât, $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$. Se știe că $m(\angle DOE) = 2m(\angle AOB)$. Să se calculeze măsurile unghiurilor DOE și EOF , unde $[OF]$ este bisectoarea unghiului AOD .
4. Un padișah persan are 100 de soții, iar în temnița lui sunt 100 de robi, în celule numerotate de la 1 la 100. Încuietorile ușilor sunt astfel construite încât dacă se întoarce cheia odată, ușa încuiată se descuie, iar ușa descuiată, se încuie. În ziua de naștere a padișahului cele 100 de soții trec prin temniță și se joacă cu încuietorile ușilor. Prima soție întoarce o dată cheia din fiecare ușă. A doua soție întoarce o dată cheia din fiecare a doua ușă, a n -a soție întoarce o dată cheia din fiecare a n -a ușă, și așa mai departe, până la soția cu numărul 100. La sfârșit, acei robi a căror ușă este descuiată sunt eliberați. Ce numere au celulele celor eliberați?

Olimpiada de matematică – clasa a VI-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. a) Se considera numerele $x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \dots + \frac{4028}{4030}\right)$ și $y = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2014 \cdot 2015}$. Calculați $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.
2. Dintr-un hambar se transportă grâu. În prima zi se transportă a $\frac{3}{8}$ -a parte a grâului. În ziua a doua, cu 10 tone mai mult decât a $\frac{8}{15}$ -a parte a grâului rămas. În a treia zi a $\frac{5}{12}$ -a parte din ce a rămas, iar a patra zi cele 35 de tone rămase. Câte tone de grâu au fost la început în hambar?
3. A, B, C, D sunt puncte coliniare, în această ordine. Media aritmetică a măsurilor segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ este 6 cm . Media aritmetică a măsurilor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$, respectiv $[BC]$ și $[CD]$ este 5 cm . Să se calculeze distanța dintre mijloacele segmentelor $[AC]$ și $[BD]$.
4. Un padișah persan are 100 de soții, iar în temnița lui sunt 100 de robi, în celule numerotate de la 1 la 100. Încuietorile ușilor sunt astfel construite încât dacă se întoarce cheia odată, ușa încuiată se descuie, iar ușa descuiată, se încuie. În ziua de naștere a padișahului cele 100 de soții trec prin temniță și se joacă cu încuietorile ușilor. Prima soție întoarce o dată cheia din fiecare ușă. A doua soție întoarce o dată cheia din fiecare a doua ușă, a n -a soție întoarce o dată cheia din fiecare a n -a ușă, și așa mai departe, până la soția cu numărul 100. La sfârșit, acei robi a căror ușă este descuiată sunt eliberați. Ce numere au celulele celor eliberați?