

Olimpiada de matematică – clasa a V-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Fie numărul $x = 7 \cdot 4^{20} + 7 \cdot 4^{19} + 7 \cdot 4^{18} + \dots + 7 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 7$. Să se arate că x este număr impar și să se afle ultima sa cifră.
2. Să se arate că dacă suma a 20 de numere naturale diferite și nenule este egală cu 418, atunci cel puțin două dintre acestea sunt impare. Să se dea un exemplu de astfel de numere.
3. a) Să se calculeze: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$
b) Să se arate că există patru numere naturale a, b, c, d pentru care are loc egalitatea $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 10^{2015}$
4. a) Să se determine numărul natural \overline{abc} , dacă
 $7^a + 5^b + 4^c = 175$.
b) Să se determine numerele naturale a, b, c dacă $a \cdot c = 42$,
 $b \cdot c = 126$, $2a + 3b = 66$.
5. Doi verișori discută între ei. Eu sunt de patru ori mai în vârstă decât tine, dar când vei fi tu de vârsta mea de acum, atunci împreună vom avea vârsta bunicii, care atunci va avea 99 de ani. Câți ani au verișorii?

Csuszner Jolán, Nagy Jenő

Olimpiada de matematică – clasa a V-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Să se găsească un număr natural de trei cifre distincte, în baza 10, care este egal cu suma tuturor numerelor de câte două cifre distincte care se pot forma cu cifrele sale. Să se găsească toate numerele de acest fel.
2. Se dau mulțimile:
 $A = \{1 + 1^{41}; 1 + 2^{41}; 1 + 3^{41}; 1 + 4^{41}; 1 + 5^{41}\}$
 $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = u(x), x \in A\};$
 $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = u(t^2), t \in \mathbb{N}\}.$
a) Să se arate că: $C \cap \{0, 1, 4, 5, 6, 9\} = C$
b) Determinați mulțimile: $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$.
3. Determinați numerele prime a, b, c care verifică relația:
 $3a + 4b + 2c = 48$
4. Fie $S = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + \dots + 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot \dots$
a) Aflați al șaptelea termen al sumei
b) Stabiliți dacă S este număr par sau impar
c) Aflați restul împărțirii numărului S la 24
5. O persoană urcă treptele unei scări după regula “urcă 3 trepte, coboară o treaptă, urcă 5 trepte și coboară o treaptă”.
a) Pe ce treaptă se află persoana după 103 pași (un pas = o treaptă)?
b) După câți pași ajunge persoana pe treapta 100?

Csatlos Blaga Maria, Mîndru Camelia, Luka Tünde