Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita V1

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Fie a, b, c trei numere reale care verifică relaţia $a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+16c-64$. Să se arate că a, b, c pot fi măsurile laturilor unui triunghi echilateral şi să se afle aria acestuia.

2. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2014\sqrt{2015}+2015\sqrt{2014}}<\frac{45}{46}$$

3. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{x-3}{x^2-1}\right):\frac{x+3}{x^2+3x+2}\cdot\frac{3x}{x^2+2x}$

Să se calculeze $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$ ştiind că

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(E(x))^{-1}\geq 0\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle||2x-3|<9\right\}$

4. Pe planul unui dreptunghi *ABCD* se ridică perpendiculara *MD* asfel încât $MA=8cm$, $MB=10cm$ şi $MC=5\sqrt{3}cm$. Calculaţi:

a) aria dreptunghiului;
b) tangenta unghiului format de planul (*MBC*) cu planul dreptunghiului;
c) distanţa de la *M* la *AC*.

5. În cubul *ABCDA'B'C'D'* *E*, *F*, *G*, *H*, *I* şi *J* sunt mijloacele muchiilor *AB*, *BB'*, *B'C'*, *C'D'*, *D'D* şi *DA*. Să se arate că:

a) Punctele *A'*, *F*, *C* şi *I* sunt coplanare şi sunt vârfurile unui romb;
b) Punctele *E*, *F*, *G*, *H*, *I* şi *J* sunt coplanare şi sunt vîrfurile unui hexagon regulat;
c) $A'C\perp(EFGHIJ)$.

Szász Diana, Simon József

Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita V2

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Fie numerele reale $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{24}}$ şi

$y=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+.....+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$

a) Să se calculeze $x+y$
b) Să se arate că, $x>2$ şi $y<2$

2. a) Să se arate că dacă numerele reale *a* şi *b* verifică relaţia $a^2+b^2=1$, atunci $\sqrt{a^4+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2}=3$

b) Fără să efectuaţi extragerea rădăcinii pătrate să se arate că $\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}<10$

3. Fie $A_n=\left\{a\in\mathbb{N}\middle||3n+1-a|\leq n\right\}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ număr natural

a) Determinmaţi elementele mulţimii A_1!
b) Câte elemente are mulţimea A_{2015}?

4. În triunghiul *ABC* avem $m(BAC)=90^\circ, m(ACB)=15^\circ, BC=4a$, $AD\perp BC, D\in BC.$ Pe perpendiculara pe planul triunghiului în punctul D se ia punctul E astfel încât $DE=a$. Fie *M* mijlocul lui (AE) şi *P* piciorul perpendicularei din punctul *B* pe *MC*.

a) Să se calculeze lungimea segmentului *AD* şi pătratul distanţelor punctului E la catetele triunghiului!
b) Să se demonstreze că $BP\perp(ACE)$

5. În trapezul isoscel ABCD $(AB\parallel CD, AB>CD)$ notăm $AC\cap BD=\{O\}$. Se ştie că $AO=6cm$, $DO=4cm$ şi $AC\perp BD$. Pe perpendiculara în D pe planul (ABC) se ia un punct M, astfel încât $DM=5\sqrt{2}cm$. Să se calculeze:

a) Distanţa de la punctul M la dreapta AC
b) Distanţa de la punctul D la planul (MAB)

Péterfi Margit, Csuszner Jolán, Baricz Levente