Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x^9, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ este injectivă şi nu este surjectivă.

2. Dacă $a,b\in(1,+\infty)$, arătaţi că $\log_a\dfrac{a+b}{2}\geq\log_{\sqrt{ab}}b$.

3. Triunghiurile echilaterale OAB şi OCD sunt la fel orientate. M, N, P şi Q sunt mijloacele laturilor AO, OB, OC respectiv CD. Arătaţi că dacă R este mijlocul segmentului MQ, atunci triunghiul NPR este dreptunghic în R.

4. Colorăm vârfurile unui poligon convex cu n laturi cu roşu sau negru. Pe segnmentele determinate de vârfuri (laturi şi diagonale) scriem 1 dacă au capetele de aceeaşi culoare şi -1 în caz contrar. Determinaţi minimul sumei numerelor scrise pe segmente.

Hargita megye Tanfelügyelősége

Matematika tantárgyverseny – X. osztály
Területi szakasz – 2015. február 15.

1. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x^9, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ függvény injektív és nem szürjektív.

2. Ha $a,b\in(1,+\infty)$, igazold, hogy $\log_a\dfrac{a+b}{2}\geq\log_{\sqrt{ab}}b$.

3. Az OAB és OCD azonos körbejárási irányú, egyenlő oldalú háromszögek AO, OB, OC, CD oldalainak felezőpontjait jelöljük rendre M-mel , N-nel, P-vel és Q-val. Bizonyítsd be, hogy ha R az MQ felezőpontja, akkor az NPR háromszög R-ben derékszögű!

4. Egy n oldalú konvex sokszög minden csúcsát kiszínezzük pirosra vagy feketére és a csúcsok által meghatározott szakaszokra (oldalakra és átlókra) 1-est írunk ha a két végpontja azonos színű, ellenkező esetben -1-est írunk. Határozd meg a szakaszokra írt számok összegének lehető legkisebb értékét!