



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro



**MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE**

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a IX-a, specializarea Tehnic

PROBLEMA 1

Se notează cu x numărul merelor din fiecare cutie.

Avem : $(x+1)+(x+2)+\dots+(x+10)=145$ 2p

Se observă că avem o progresie aritmetică cu rația $r=1$, $a_1=x+1$ și $a_{10}=x+10$1p

Suma primilor 10 termeni este $S_{10}=(a_1+a_{10})\cdot 5$,.....1p

$(2x+11)\cdot 5=145$ 1p

$x=9$, finalizare2p

PROBLEMA 2

Rezolvare:

$$P(n) : 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} : 19;$$

I. Etapa de verificare (1p)

II . $P(k) \rightarrow P(k+1);$ (2p)

$$P(k) : 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} : 19$$

$$P(k+1) : 5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3} : 19$$

Demonstrarea lui $P(k+1)$ (3p)

$P(k+1)$ adevărată, atunci conform principiului inducției matematice,

$$P(n) : 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} : 19 \text{ adevărată } \forall n \in N, n \geq 1 \quad (1p)$$

PROBLEMA 3

Rezolvare:

$$3g(-x) - 9g(x) = 5x^3 + 9x$$

$$3g(x) - 9g(-x) = -5x^3 - 9x,$$

$$-6g(x) - 6g(-x) = 0 \quad / : (-6)$$

$$g(-x) = -g(x) \text{ deci funcția } g \text{ este impară}$$

1. $3g(x) - 9g(-x) = -5x^3 - 9x, \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
2. Rezolvarea sistemului $\dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
3. Relația $g(-x) = -g(x) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
4. Concluzia funcția $g(x)$ este impară $\dots\dots\dots 1 \text{ puncte}$

PROBLEMA 4

$$\begin{aligned} \text{a)} & |1 - \sqrt{3}| + |2\sqrt{3} - 5| + \sqrt{3} = -(1 - \sqrt{3}) + (- (2\sqrt{3} - 3)) + \sqrt{3} \dots\dots\dots 2 \text{ p.} \\ & = -1 + \sqrt{3} + (-2\sqrt{3} + 5) + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5 + \sqrt{3} = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ p.} \end{aligned}$$

$$\text{b)} -4 \leq 3x + 1 \leq 4, \quad -5 \leq 4y - 1 \leq 5 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\frac{-5}{3} \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{-20}{3} \leq 4x \leq 4, \quad -5 \leq 5y \leq \frac{15}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\frac{-20}{3} - 5 \leq 4x + 5y \leq 4 + \frac{15}{2}$$

$$\text{Valoarea minimă este } -\frac{35}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală – 14 februarie 2015

Clasa a X-a, specializarea Tehnic

PROBLEMA 1

$$2 + x > 0; x^2 - x - 1 > 0; x^2 - x - 1 \neq 1 \dots\dots\dots (1p)$$

$$x \in (-2; \infty) \dots\dots\dots (1p)$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right) \dots\dots\dots (2p)$$

$$x \neq 2 \text{ și } x \neq -1 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{finalizare} \dots\dots\dots (2p)$$

PROBLEMA 2

Se dă numărul $z_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați z_4 și z_{100} .

b) Determinați valorile naturale ale lui n pentru care $z_n = 1 + i$

$$\text{Barem: a) } z_3 = 1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$z_{100} = 1 + i + \dots + i^{100} = \frac{i^{101} - 1}{i - 1} = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{b) } z_n = \frac{i^{n+1} - 1}{i - 1} = \begin{cases} 1, n = 4k \\ 1 + i, n = 4k + 1 \\ i, n = 4k + 2 \\ 0, n = 4k + 3 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

PROBLEMA 3

Rezolvare :

a) Calculează : $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \pm 1$ 2 p

Calculează: $\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}$ 2 p

Se calculează forma finală a lui E2 p

b) Calculează : E(a)1 p

PROBLEMA 4

a) $-x^2 + 5x \geq 0$(1p)

Rezolvarea ecuației și determinarea soluției $x \in [0,5]$(2p)

b) $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{26}}{3}$ și $f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{\sqrt{301}}{10}$(2p)

Comparare și finalizare.....(2p)

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a XI-a, specializarea Tehnic

PROBLEMA 1

Limita este finită când $x \rightarrow \infty$ dacă este cazul $\infty - \infty$ (trebuie amplificat cu conjugata),

dar pentru asta trebuie ca $a - \sqrt{c} = 0$. (1p)

După amplificare cu conjugata, se obține un raport de polinoame care are limita 1 dacă polinoamele au același grad și raportul coeficienților dominanți este 1 (1p)

$$\text{Adică } \begin{cases} a - \sqrt{c} = 0 \\ b = 0 \\ \frac{2}{a + \sqrt{c}} = 0 \end{cases} \quad (2p) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad (3p)$$

PROBLEMA 2

Rezolvare :

a) Calculează A^2, A^3 1 p

Calcul final, verificare 1 p

b) Demonstrează formula dată prin inducție matematică

I. Verificare $n=3$ 1 p

II. $P(k) \rightarrow P(k+1)$, $\forall k \in N^*$, $k \geq 3$ 2 p

c) Folosind relația demonstrată la punctul b) , pornind descrescător de la

$n = 100$, până la $n = 4$ 1 p

Definitivarea calculelor 1 p

PROBLEMA 3

a)

Calculează coordonatele celor trei puncte.....1p

Calculează valoarea determinantului.....1p

Calculează aria triunghiului.....1p

b)

Calculează coordonatele celor trei puncte.....1p

Calculează valoarea determinantului (=2).....2p

Calculează aria triunghiului (=1).....1p

PROBLEMA 4

Soluție:

a) Prin calcul se obține: $f(x) = e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3$. (2p)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3 = 0. \quad (1) \quad \text{Fie } e^{x^2+x+a} = y > 0.$$

Ecuția (1) devine: $y^3 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y+2) = 0 \Rightarrow y = 1$ soluție. (1,5p)

Avem $e^{x^2+x+a} = 1 \Rightarrow x^2 + x + a = 0$. Ecuția are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$. (1,5p)

b) Ecuția $f(x) = 0$ are soluții strict negative \Rightarrow ecuația $x^2 + x + a = 0$ are soluții negative

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0, S < 0, P > 0 \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{1}{4}\right]. \quad (2p)$$

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a XII-a, specializarea Tehnic

PROBLEMA 1

a) Continuitatea funcției f 2p

O primitivă a funcției f , $F(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x}{2}; x > 1 \\ x - \ln x - 1; x \in (0, 1) \end{cases}$ 2p

b) Integrala $I = \int \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \frac{f(x)}{x} + C$ 3p

PROBLEMA 2

a) Demonstrarea identității1p

b) Determinarea rădăcinilor: $x_1 = -1$; $x_2 = 7$, reale2p

c) Asociativitatea legii de compoziție2p

d) $\sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \dots * \sqrt[3]{2015} = 3$ 2p

PROBLEMA 3

Menționarea elementelor mulțimii1p

calcul prin verificare directă1p

rezolvă ecuația sau găsește soluțiile prin verificare directă1p

rezolvă sistemul4p

PROBLEMA 4

$\int \left(2x - x^3 - \frac{5}{x} + e^x + \frac{13}{x^2 - 4} \right) dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \ln x + 13 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$ 3p

$\int e^x (3x^2 - 5) dx = e^x (3x^2 - 6x + 1) + C$ 4p