

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a X-a, specializarea uman

*Notă: Orice soluție prezentată, alta decât cea din barem se evaluează la punctajul maxim aferent problemei*

### **PROBLEMA 1**

a) Pe mulțimea  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  este definită o operație “\*” astfel încât în tabla operației fiecare element al mulțimii apare exact o dată pe fiecare linie și pe fiecare coloană. Reconstituiți tabla operației în cazul

*	1	2	3	4
1	1		3	2
2	4			1
3			1	
4	2	1	4	

b) Dați exemplu de o operație internă „•” pe mulțimea  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  astfel încât  $1 \bullet 1 = 2, 2 \bullet 2 = 3, 3 \bullet 3 = 4, 4 \bullet 4 = 1$  și pe fiecare linie și pe fiecare coloană a tablei operației să nu găsim două elemente egale.

*(propusă de prof. Opreș Adonia Augustina – Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” Zalău)*

### **Soluție:**

a) Completarea elementelor ..... 4 puncte

*	1	2	3	4
1	1	<b>4</b>	3	2
2	4	<b>3</b>	<b>2</b>	1
3	<b>3</b>	<b>2</b>	1	<b>4</b>
4	2	1	4	<b>3</b>

b) Spre exemplu ..... 3 puncte

•	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	1	3	2	4
3	3	1	4	2
4	4	2	3	1

## **PROBLEMA 2**

Pe multimea  $\mathbf{R}$  se consideră legea de compozitie  $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$

a) Să se verifice că  $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$

b) Aflați  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x \circ a = a$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$

c) Știind că legea de compozitie “ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze expresia:

$$E = (-2015) \circ (-2014) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2015$$

(propusă de prof. Popa Daniela – Liceul Pedagogic „Gheorghe Șincai” Zalău)

### **Soluție:**

a) Demonstrează relația .....2 puncte

b)  $a = 2$  .....2 puncte

c) Observăm că  $x \circ 2 = 2 \circ y = 2$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  .....1 punct

Notăm  $a = (-2015) \circ (-2014) \circ \dots \circ 0 \circ 1, b = 3 \circ 4 \circ \dots \circ 2015$  și  $E = a \circ 2 \circ b = 2$  .....2 puncte

## **PROBLEMA 3**

În  $M_3(\mathbf{R})$  se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

a) Demonstrați că  $A^3 = O_3$  și  $\det(I_3 + A) \det(I_3 - A + A^2) = 1$

b) Calculați  $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2011A^{2010}$

c) Calculați  $(I_3 + A)^n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$

(propusă de prof. Popa Daniela – Liceul Pedagogic „Gheorghe Șincai” Zalău)

### **Soluție:**

a)  $\det(I_3 + A) \det(I_3 - A + A^2) = \det(I_3 + A) \det(I_3 - A + A^2) = \det(I_3 + O_3) = 1$  .....3 puncte

b) Din  $A^3 = O_3 \rightarrow A^n = O^3 \rightarrow 2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2011A^{2010} = A^2 + 4A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots 2 \text{ puncte}$

c)  $(I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots 2 \text{ puncte}$

#### **PROBLEMA 4**

Se dau numerele reale  $a, b, c$ , funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x + 3$  și determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

Să se arate că

a)  $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

b)  $A = B$

c) (propusă de prof. Popa Daniela – Liceul Pedagogic „Gheorghe Șincai” Zalău)

#### **Soluție:**

a)  $A = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a+b+c) \dots 4 \text{ puncte}$

b)  $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 + 2a + 3 & b^3 + 2b + 3 & c^3 + 2c + 3 \end{vmatrix} = A \dots 3 \text{ puncte}$