

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015
 Clasa a XII-a, specializarea Servicii

Barem de corectare

PROBLEMA 1

- a) Prin calcul direct se arată că $(x - 5)(y - 5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30$2p
- b) Se verifică axiomele grupului;
- asociativitate.....0,75p
 - comutativitate.....0,75p
 - elementul neutru este $e = 6$0,75p
 - simetricul lui x este $x' = 5 + \frac{6}{x-5} \in (5, \infty)$ 0,75p
- c) Folosind metoda inducției matematice, se poate demonstra că
 $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = (x - 5)^n + 5, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 1,5p
- Pentru $n = 2005$ rezultă $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2005 \text{ ori}} = (x - 5)^{2005} + 5$ 0,5p

PROBLEMA 2

- a) Se efectuează calculul și se verifică 4 p
- b) $f(X \circ Y) = mX \cdot Y + 2mX + 2mY + (2m + n)I_3$
- $f(X) \cdot f(Y) = mX \cdot Y + mnX + mnY + n^2I_3$ 2 p
- $\left. \begin{array}{l} 2m = m \cdot n \Rightarrow n = 2 \\ 2m + n = n^2 \Rightarrow m = 1 \end{array} \right\}$ 1 p

PROBLEMA 3

F este o primitivă a funcției f dacă $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Avem $F'(x) = \left((ax^2 + bx + c) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \right)' = (ax^2 + bx + c)' \cdot e^{-\frac{x}{2}} + (ax^2 + bx + c) \cdot \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)' =$

$= (2ax + b) \cdot e^{-\frac{x}{2}} + (ax^2 + bx + c) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{-a}{2}x^2 + \left(2a - \frac{b}{2} \right)x + \left(b - \frac{c}{2} \right) \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$3p

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{-a}{2}x^2 + \left(2a - \frac{b}{2} \right)x + \left(b - \frac{c}{2} \right) = 3x^2 + x - 1$1p

De aici rezultă
$$\begin{cases} \frac{-a}{2} = 3 \\ 2a - \frac{b}{2} = 1 \\ b - \frac{c}{2} = -1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Rezolvând sistemul se obține $a = -6, b = -26, c = -50 \dots\dots\dots 2p$

PROBLEMA 4

a) Verificarea continuității $\dots\dots\dots 2p$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + c_1, x < 0 \\ 2x - \cos x + c_2, x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

Din continuitatea primitivei $c_1 = c_2 - 1 \dots\dots\dots 1p$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + c_1, x < 0 \\ 2x - \cos x + c_1 + 1, x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Din $F(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \dots\dots\dots 1p$