

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a IX-a, specializarea uman

*Notă: Orice soluție prezentată, alta decât cea din barem se evaluează la punctajul maxim aferent problemei*

### **PROBLEMA 1**

Determinați mulțimile  $A$  și  $B$  care satisfac simultan condițiile:

- a)  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- b)  $A \cap B = \emptyset$
- c)  $\forall a \in A, \exists b \in B$  astfel încât  $a + b = 5$
- d)  $\forall b \in B, \exists a \in A$  astfel încât  $b - a = 1$

### **Soluție**

Dacă presupunem  $0 \in B \Rightarrow (\exists) a \in A$  astfel încât  $0 - a = 1 \Rightarrow a = -1 \in A$  fals deci  $0 \in A$  .....1 punct

Din  $0 \in A \Rightarrow 0 + b = 5 \in B$ ; din  $5 \in B \Rightarrow \exists a \in A$  astfel încât  $5 - a = 1 \Rightarrow a = 4 \in A$

din  $4 \in A \Rightarrow \exists b \in B$  astfel încât  $4 + b = 5 \Rightarrow b = 1 \in B$  .....2 puncte

dacă presupunem  $2 \in B \Rightarrow \exists a \in A$  astfel încât  $2 - a = 1 \Rightarrow a = 1 \in A$  deci  $A \cap B = \{1\}$  contradicție

deci  $2 \in A$  .....2 puncte

$2 \in A \Rightarrow 3 \in B$  ..... 1 punct

Finalizare  $A = \{0, 2, 4\}$  și  $B = \{1, 3, 5\}$  .....1 punct

## **PROBLEMA 2**

La bursă valoarea unei acțiuni a firmei A este de 400 de lei, dar această valoare scade lunar cu 40 de lei. Firma B are valoarea unei acțiuni de 200 de lei, dar această valoare crește lunar cu 10 lei. După câte luni acțiunile celor două firme au aceeași cotație? După câte luni firma A va fi falimentară?

### **Soluție**

$n =$  nr. de luni; pentru firma A formăm progresia aritmetică  $a_n = 400 - (n - 1) \cdot 40$   
 iar pentru firma B formăm progresia aritmetică  $b_n = 200 - (n - 1) \cdot 20$  .....3  
 puncte

Firmele A și B au aceeași cotație  $a_n = b_n \Rightarrow n = 5$  luni .....2 puncte

Firma A ajunge la faliment dacă  $a_n = 0 \Rightarrow n = 11$  luni .....2 puncte

## **PROBLEMA 3**

Să se determine numerele reale  $a$  și  $n$  știind că are loc următoarea egalitate

$$\frac{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n}} = 3^{2011}$$

### **Soluție**

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

.....1 punct

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{n+1}} - 1}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a^n(a - 1)}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

..... 2 puncte

$$\frac{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n}} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^n(a - 1)}{a^{n+1} - 1} = a^n$$

..... 2 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ  
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059  
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,  
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

---

$$a^n = 3^{2011}, 2011 \text{ prim} \Rightarrow a = 3, n = 2011$$

.....2 puncte

#### **PROBLEMA 4**

Să se determine valorile întregi ale lui  $b$  pentru care ecuația  $bx - 3 = 2x + 4$  are soluții întregi.

#### **Soluție**

$$x \cdot (b - 2) = 7 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Pentru  $b = 2$  ecuația nu are soluții .....1 puncte

$$\text{Pentru } b \neq 2 \quad x = \frac{7}{b-2} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b - 2 \in \{-7, -1, 7, 1\}, \text{ deci } b \in \{-5, 1, 9, 3\} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

*Subiectul este propus de prof. Bighe Alina – Liceul Pedagogic “Gheorghe Șincai” Zalău*