

T1

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 19 februarie 2015
CLASA A X-A

Filiera tehnologică: profil tehnic-toate calificările profesionale

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) $a \cdot b = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \dots (\sqrt{2015} - \sqrt{2014})(\sqrt{2015} + \sqrt{2014}) \dots 2p$

observă $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1, \forall n = \overline{2, 2015} \dots 1p$

Finalizează și obține $a \cdot b = 1 \dots 1p$

b) Din $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1, \forall n = \overline{2, 2015}$ obține $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}, \forall n = \overline{2, 2015} \dots 1p$

Înlocuiește $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ cu $\frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}, \forall n = \overline{2, 2015}$ în expresia lui a. $\dots 1p$

Finalizează și obține rezultatul cerut. $\dots 1p$

SAU : Pornind de la $\frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{4} + \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2014} + \sqrt{2013})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{4}) \dots (\sqrt{2015} + \sqrt{2014})}$ prin raționalizare se obține

$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{4}) \dots (\sqrt{2014} + \sqrt{2013})(\sqrt{2015} - \sqrt{2014})$ adică a. $\dots 3p$

SUBIECTUL II

a) $\alpha = \log_{\sqrt{7}}(7 \cdot \sqrt[3]{49}) + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \log_{\sqrt{7}}\left(7 \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3} = \dots 1p$

$= \log_{\sqrt{7}}\left(7^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \log_{\sqrt{7}}(7) + \frac{2}{3} = \dots 1p$

$= \frac{5}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} = 4 \in N \dots 1p$

b) $3^{1 + \log_{\frac{1}{3}} \alpha} = 3 \cdot 3^{\log_{\frac{1}{3}} 4} = \dots 1p$

$= 3 \cdot 3^{\frac{\log_1 4}{3}} = 3 \cdot 4^{-1} = \frac{3}{4} \dots 1p$

c) Observă $2^p = 3 \Leftrightarrow p = \log_2 3 \dots 1p$

$\log_2(6 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}) = \log_2(6 \cdot \sqrt[3]{16}) = \log_2(3 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{4}{3}}) = \log_2 3 + \log_2 2^{\frac{7}{3}} = p + \frac{7}{3} \dots 1p$

SUBIECTUL III

a) Calculează $a = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3^{\frac{4}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}}$ 1p

Calculează $a^3 = 3^2$ care este pătrat perfect.....1p

b) $b = \left(\frac{(\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}-1)^{-\sqrt{3}}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{3})^{4+\sqrt{3}}}{(1+\sqrt{3})^{2+\sqrt{3}}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left((\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left((1+\sqrt{3})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} =$ 1p

$= \left((\sqrt{3}-1)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left((1+\sqrt{3})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3}-1)^{2-3} \cdot (\sqrt{3}+1)^{-1} = (3-1)^{-1} = \frac{1}{2}$ 1p

c) Specifică $\sqrt{a} > 0$ și $2^b > 0$ 1p

Calculează $(\sqrt{a})^6 = 9$, $(2^b)^6 = 8$ 1p

Compară cele două numere și obține $2^b < \sqrt{a}$ 1p

SUBIECTUL IV

a) Calculează $|z_1| = \sqrt{m^2+1^2} = \sqrt{1^2+m^2} = |z_2|, \forall m \in \mathbb{R}$ 2p

b) Pentru $m = -2$ numărul $z_2 = 1 - 2i$ este soluție a ecuației date dacă $z_2^2 - 2z_2 + 5 = 0$ 1p

Verifică $z_2^2 - 2z_2 + 5 = (1-2i)^2 - 2(1-2i) + 5 = 1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 5 = 0$ 1p

(sau rezolvă ecuația și obține $z_{1,2} = 1 \pm 2i$, de unde concluzia2p)

c) Calculează $\frac{z_1}{z_2} = \frac{m+i}{1+mi} = \frac{(m+i)(1-mi)}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2} + \frac{1-m^2}{1+m^2}i$ 1p

Interpretează $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ și obține $\frac{1-m^2}{1+m^2} = 0$ 1p

Finalizează și obține că $m \in \{1, -1\}$ 1p