T3

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 19 februarie 2015
CLASA A X-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Ridicând la pătrat se obţine $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2=\left(a+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 11+6\sqrt{2}=a^2+2+2a\sqrt{2}$.

Cum $a\in Q \Rightarrow a=3$... ……………………………………………………………………………1p

Ridicând la cub se obţine $\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)^3=\left(b-\sqrt{3}\right)^3 \Leftrightarrow 26-15\sqrt{3}=b^3-3\sqrt{3}+9b-3b^2\sqrt{3}$. Cum $b\in Q\Rightarrow b=2$

……………………………………………………………………………………2p

b) Observă $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$ şi $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ obţine……………………………1p

Obţine $x=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6$, $y=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$ ……………………………………1p

deci $y^3=3y+52=64$, $x^2=6^2=36$……………………………………………………1p

SAU $y^3=\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)^3=52+3\sqrt[3]{\left(26+15\sqrt{3}\right)\left(26-15\sqrt{3}\right)}y=52+3y$………………… *2p*

Şi $x^2=\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2=22+2\sqrt{\left(11+6\sqrt{2}\right)\left(11-6\sqrt{2}\right)}=22+2\sqrt{49}=36$ ……………………*1p*

c) Înlocuieşte valorile găsite pentru x şi y în expresia de calculate şi obţine $\left(x-y-1\right)^{2015}=1^{2015}=1$….1p

SUBIECTUL II

1.a) Calculează $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1+3}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………………1p

Calculează $\alpha^3=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$ sau observă că este rădăcină cubică a unităţii..…………………………1p

b)Observă $\alpha^{2015}=\alpha^{3\cdot 671+2}=\left(\alpha^3\right)^{671}\cdot\alpha^2=1^{671}\cdot\alpha^2=\alpha^2$ ………………………………………………1p

α este rădăcină a ecuaţiei date $\Leftrightarrow \alpha^{2015}+\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+1=0$ şi justifică $\alpha^2+\alpha+1=0$ ………..1p.

c) $\alpha^n+\alpha^{n-2}=-1 \Leftrightarrow \alpha^{n-2}\left(\alpha^2+1\right)=-\alpha^{3k}, k\in Z$ ……………………………………………………………1p

Înlocuieşte $\alpha^2+1=-\alpha$ şi obţine $-\alpha^{n-1}=-\alpha^{3k}$, $k\in Z$ ………………………………………………1p

Deduce $n=3k+1, k\in Z$ şi finalizează n=2014……………………………………………………1p

SUBIECTUL III

$a)\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{2^{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\cdot 4^{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{4}\right)^{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\cdot\left(\dfrac{\frac{1}{4}}{2}\right)^{\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$ 1p

$=\left(\frac{1}{8}\right)^{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\lg 1}=1$ 2p

b) "$\Rightarrow$" Se schimbă baza logaritmilor în baza2015 şi se obţine $\dfrac{\log_{2015}a-1}{\log_{2015}a}=\dfrac{\log_{2015}b}{\log_{2015}b-1}$ 1p

Efectuează calculele şi obţine $\log_{2015}a+\log_{2015}b=1\Rightarrow\log_{2015}ab=1$ 1p

Finalizează $a\cdot b=2015$ 1p

"$\Leftarrow$" Din $a\cdot b=2015\Rightarrow b=\dfrac{2015}{a}$ şi înlocuind obţine $\log_{\frac{b}{2015}}b=\log_{\frac{2015}{\frac{a}{2015}}}\dfrac{2015}{a}=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{2015}{a}=\log_a\dfrac{a}{2015}$

....1p

(***SAU*** *Se schimbă baza logaritmilor în baza2015 şi se obţine* $\dfrac{\log_{2015}a-1}{\log_{2015}a}=\dfrac{\log_{2015}b}{\log_{2015}b-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_{2015}a+\log_{2015}b=1\Leftrightarrow\log_{2015}ab=1\Leftrightarrow ab=2015$ ....*4p*)

SUBIECTUL IV

a) Notează $z_1=\sqrt{3}+i$ şi $z_2=1-i$ 1p

Scrie sub formă trigonometrică $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ 1p

Obţine $z=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4})\right)=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{19\pi}{12})+i\sin(-\frac{19\pi}{12})\right)$ 1p

Finalizează $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ 1p

b) Observă că $z^{12}=2^6(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=-64$ 1p

Ecuaţia devine $x^3-64=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2+4x+16)=0$ adică $x_1=4$ 1p

Sau $x^2+4x+16=0\Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{-4\pm 4i\sqrt{3}}{2}=-2\pm 2\sqrt{3}i$ 1p