T2

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A XII-A

Filiera tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

SUBIECTUL I

Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x \cdot y - ax - ay + a^2 + a$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$ şi $a \in \mathbf{R}$.

a) Verificaţi că pentru orice $a \in R$, legea admite element neutru $e = a+1$.

b) Pentru $a = 2$ determinaţi elementele $x \in \mathbf{R}$ ale căror simetrice în raport cu legea „$*$” verifică relaţia $x' = \frac{3}{2} - x$.

c) Pentru $a > 1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $a^x \circ a^x = a$.

SUBIECTUL II

Fie mulţimea $G = \left\{ A(x) \in M_2(R) \;\middle|\; A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\}$ şi $f : R \to G,\ f(x) = A(x+k), k \in R.$

a) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall) A(x), A(y) \in G$.

b) Ştiind că $(\boldsymbol{G}, \cdot)$ este grup, determinaţi $k \in R$ astfel încât f să fie morfism de grupuri între grupurile $(R,+)$ şi $(G,\cdot)$.

c) Determinati $x \in \mathbf{R}$ astfel încât, $A(x) \circ A^2(x) \circ ... \circ A^{2015}(x) = A(2015)$, unde $A^2(x) = A(x) \cdot A(x)$.

SUBIECTUL III

Fie funcţiile $f, g, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+2014)\cdot(x^2+2015)}$, $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+a}$ şi $G(x) = \ln(x^2+a)$ cu $a > 0$.

a) Arătaţi că $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2014} - \dfrac{2x}{x^2+2015}, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

b) Arătaţi că $\boldsymbol{G}$ este o primitivă a funcţiei $\boldsymbol{g}$.

c) Determinaţi primitiva $\boldsymbol{F}$ a funcţiei $\boldsymbol{f}$ cu proprietatea că $F(0) = 0$.

SUBIECTUL IV

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2015(x^2 - x)}{x-1} - 2015 &, \quad x < 1 \\ x^2 + \ln x - 1 &, \quad x \ge 1 \end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia admite primitive pe $\mathbf{R}$.

b) Arătaţi că orice primitivă a lui $\boldsymbol{f}$ este convexă pe intervalul $(1, \infty)$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş