



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală – Constanța, 18.02.2017

Clasa a XII-a

Filiera teoretică: Profilul Real- specializarea științele naturii

SUBIECTUL 1

Fie mulțimea $G = (-3, 3)$. Se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{9x + 9y}{9 + xy}$.

- Să se demonstreze că legea de compoziție este bine definită pe mulțimea G .
- Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- Fie $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$. Să se arate că funcția f este izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbf{R}, +)$.

SUBIECTUL 2

Fie $M = \left\{ A(a) \in M_2(\mathbf{R}) \mid A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$ și legea definită prin $A \circ B = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$, $\forall A, B \in M$.

- Arătați că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- Studiați proprietățile legii de compoziție " \circ " pe mulțimea M .
- Determinați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $A(x) \circ A^2(x) \circ A^3(x) \circ \dots \circ A^{2017}(x) = A(2017)$

SUBIECTUL 3

Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$

- Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbf{R} .
- Calculați primitiva funcției f care se anulează în origine.

SUBIECTUL 4

a) Să se calculeze integrala $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Să se calculeze integrala $\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$, $x \in \mathbf{R}$.

c) Să se calculeze integrala $\int \frac{x(\cos x - \sin x) + \cos x}{x \cos x + e^{-x}} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.