

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profilul servicii, profilul resurse

Clasa a X-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care există expresia $E(x) = \log_2(2x^2 - x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8)$.

Soluție.

$$2x^2 - x - 1 > 0, x^2 - 8 > 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2\sqrt{2}, x_4 = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$S_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \dots\dots\dots 1p$$

$$S_2 = \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, +\infty\right) \dots\dots\dots 1p$$

$$S_{finală} = S_1 \cap S_2 = \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, +\infty\right) \dots\dots\dots 2p$$

2. a) Calculați $\operatorname{Re}\left(\frac{2+i}{2-i}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1+2i}{2i}\right)$. b) Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}$, atunci calculați $|z|$.

Soluție.

$$a) \operatorname{Re}\left(\frac{2+i}{2-i}\right) = \operatorname{Re}\frac{(2+i)(2+i)}{5} = \operatorname{Re}\frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 1p$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+2i}{2i}\right) = \operatorname{Im}\frac{-4+2i}{-4} = \operatorname{Im}\left(1 - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \bar{z} + \frac{4}{\bar{z}} = z + \frac{4}{z} \Leftrightarrow (z - \bar{z})\left(1 - \frac{4}{|z|^2}\right) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow |z| = 2 \dots\dots\dots 1p$$

3. Arătați că $S = \frac{1}{\lg 2 \cdot \lg 2^2} + \frac{1}{\lg 2^2 \cdot \lg 2^3} + \dots + \frac{1}{\lg 2^{2015} \cdot \lg 2^{2016}} - \frac{2015}{2016} \cdot \log_2^2 10 = 0$.

Soluție.

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \lg^2 2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \lg^2 2} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016 \cdot \lg^2 2} - \frac{2015}{2016} \cdot \log_2^2 10 \dots\dots\dots 3p$$

$$S = \frac{1}{\lg^2 2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right) - \frac{2015}{2016} \cdot \log_2^2 10 \dots\dots\dots 2p$$

$$S = \frac{2015}{2016} \cdot \frac{1}{\lg^2 2} - \frac{2015}{2016} \log_2^2 10 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

4. Demonstrați că $\left(x^2 - x + \frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{10}} \geq 1$, pentru orice număr real x .

Soluție.

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \geq 1, (\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 5p$$

$$\left(x^2 - x + \frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{10}} \geq 1^{\frac{1}{10}} = 1, (\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$$