

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI", ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016  
Filiera tehnologică, profilul servicii, profilul resurse**

**Clasa a XII-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

1. Se dă legea de compoziție  $x \circ y = x + y + xy$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

a) Determinați elementele simetrizabile ale legii de compoziție " $\circ$ ".

b) Calculați  $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{2016}$ .

**Soluție.**

a) elementul neutru este egal cu 0 .....2p

$x' = \frac{-x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0, -2\}$  .....2p

b) Observăm  $1 \circ \frac{1}{2} = 2$ ,  $2 \circ \frac{1}{3} = 3$ ,  $3 \circ \frac{1}{4} = 4$  .....2p

$1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{2016} = 2016$  .....1p

2. Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție " $*$ " definită prin  $x * y = xy + ix + iy - 1 - i$ .

a) Să se verifice identitatea  $x * y = (x+i)(y+i) - i$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{C}$ .

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $x * x * x * x = 1 - i$ .

**Soluție.**

a) Verificarea identității .....2p

b)  $x * x * x * x = (x+i)^4 - i$  .....2p

$(x+i)^4 - i = 1 - i \Leftrightarrow (x+i)^4 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - i, x_2 = -1 - i, x_3 = 0, x_4 = -2i$  .....3p

3. Demonstrați că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x \in (-\infty, 0] \\ x \ln x, x \in (0, 1) \\ e^x - e, x \in [1, +\infty) \end{cases}$  admite primitive.

**Soluție.**

$$l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ continuă în } x = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 0 \Rightarrow f \text{ continuă în } x = 1 \dots\dots\dots 3p$$

$f$  continuă pe  $(-\infty, 0), (0, 1), (1, +\infty)$  și în 0 și 1  $\Rightarrow f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive. 1p

4. Determinați o primitivă a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$  al cărei grafic conține punctul  $A(0, 2)$ .

**Soluție.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_1, & x \geq -1 \\ -x + c_2, & x < -1 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$F_s(-1) = F_d(-1) = F(-1) \Rightarrow c_1 = c_2 + 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_2 + 1, & x \geq -1 \\ -x + c_2, & x < -1 \end{cases} \text{ și } F(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \geq -1 \\ -x + 1, & x < -1 \end{cases} \dots\dots 2p$$