

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI", ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016**

Filiera tehnologică, profilul servicii, profilul resurse

Clasa a IX-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră numărul $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016}$.

a) Demonstrați că $S < 2^{2017}$.

b) Demonstrați că $S : 15$.

Soluție.

a) $S = \frac{2^{2016} \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 2^{2017} - 2$ 3p

$2^{2017} - 2 < 2^{2017}$ 1p

b) $S = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{2013}(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$ 2p

$S = 15(2 + 2^5 + \dots + 2^{2013})$ 1p

$S : 15$ 1p

2. Arătați că $2^n > n^2 + n + 1$, pentru orice număr natural n , $n \geq 5$.

Soluție.

Fie $P(n) : "2^n > n^2 + n + 1, \forall n \geq 5"$

$P(5) : 2^5 > 5^2 + 5 + 1 \Leftrightarrow 32 > 31(A)$ 2p

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ 1p

$2^n > n^2 + n + 1 | \cdot 2 \Rightarrow 2^{n+1} > 2n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2 + (n+1) + 1$ 2p

$2n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2 + (n+1) + 1 \Leftrightarrow n(n-1) \geq 5 \cdot 4 = 20 > 1$ 2p

3. Rezolvați ecuația $[x] + [x+1] + [x+2] + \dots + [x+200] = 20502$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Soluție.

$$201 \cdot [x] + 1 + 2 + \dots + 200 = 20502 \dots\dots\dots 3p$$

$$201 \cdot [x] + 20100 = 20502 \dots\dots\dots 1p$$

$$201 \cdot [x] = 402 \dots\dots\dots 1p$$

$$[x] = 2 \Rightarrow x \in [2, 3) \dots\dots\dots 2p$$

4. Se consideră triunghiul ABC , punctele A', B', C' mijloacele laturilor $(BC), (CA), (BA)$ și M un punct oarecare în planul triunghiului ABC . Arătați că:

a) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}$.

Soluție.

a) $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}); \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}); \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \dots\dots\dots 1p$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \dots\dots\dots 2p$$

b) $\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}); \overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}); \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \dots\dots\dots 3p$

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \dots\dots\dots 1p$$