

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Clasa a X-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Arătați că $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{5} + \sqrt{7} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Soluție.

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 4p$$

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{5} + \sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 3p$$

2. Fie a și b rădăcinile reale ale ecuației $x^2 - 5^{2016} \cdot x + 5^{4031} = 0$. Calculați $\log_5 \frac{a^3 + b^3}{2}$.

Adelina Ion

Soluție.

$$a + b = 5^{2016}; a \cdot b = 5^{4031} \dots\dots\dots 1p$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a \cdot b + b^2) = 5^{2016} \cdot (5^{4032} - 3 \cdot 5^{4031}) = 5^{6047} \cdot 2 \dots\dots\dots 3p$$

$$\log_5 \frac{a^3 + b^3}{2} = \log_5 \frac{5^{6047} \cdot 2}{2} = \log_5 5^{6047} = 6047 \dots\dots\dots 3p$$

3. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, atunci calculați:

a) $x_1^{2016} + x_2^{2016}$;

b) $(1+x_1)^{2016} + (1+x_2)^{2016}$;

c) $S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{2016}$, unde ε este o rădăcină a ecuației date.

Mihaela Giurcă

Soluție.

a) $x_1^3 = x_2^3 = 1 \Rightarrow x_1^{2016} + x_2^{2016} = 2 \dots\dots\dots 2p$

$$b) (1+x_1)^{2016} + (1+x_2)^{2016} = (-x_1^2)^{2016} + (-x_2^2)^{2016} = x_1^{4032} + x_2^{4032} = 2 \dots\dots\dots 2p$$

c) Suma are 2017 termeni. Se grupează trei câte trei și rămâne ultimul termen al sumei.

$$S = (1+\varepsilon+\varepsilon^2) + \varepsilon^3(1+\varepsilon+\varepsilon^2) + \dots + \varepsilon^{2013}(1+\varepsilon+\varepsilon^2) + \varepsilon^{2016}$$

$$S = \varepsilon^{2016} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

4. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația:

$$x^{x-1} - 1 = (x-1)^3.$$

Nicolae Stănică

Soluție.

1, 2, 3 verifică relația din enunț.....3p

Dacă $x \geq 4 \Rightarrow x^{x-1} - 1 \geq x^{4-1} - 1 = x^3 - 1 > x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 \dots\dots\dots 4p$