

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016**  
**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

**Clasa a IX-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

1. Rezolvați ecuația  $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{x+2016}{2}$ , unde prin  $[x]$  am notat partea întreagă a numărului real  $x$ .

*Mihaela Giurcă*

**Soluție.**

Utilizând identitatea lui Hermite, ecuația devine:

$$[2x] = \frac{x+2016}{2} \Rightarrow 2x-1 < \frac{x+2016}{2} \leq 2x; 672 \leq x < \frac{2018}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{x+2016}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2016}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2k - 2016 \dots\dots\dots 2p$$

$$1344 \leq k < 1344, (3) \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1344 \Rightarrow x = 672 \dots\dots\dots 2p$$

2. Se consideră funcția  $f : \{1, 2, 3, \dots, 2015\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ .

a) Dacă  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2015) \neq 0$ , atunci arătați că  $f(1) + f(2) + \dots + f(2015) \neq 0$ .

b) Calculați suma  $f(1) + f(2) + \dots + f(2015)$ , unde  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(k) = k^2 + k$ , pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$ .

*Roxandra Murea*

**Soluție.**

a) Cum  $f(n) \neq 0$  pentru orice  $n \in \overline{1, 2015} \Rightarrow f(n) \in \{-1, 1\}$  pentru orice  $n \in \overline{1, 2015} \dots\dots\dots 2p$

$f(1) + f(2) + \dots + f(2015)$  are un număr impar de termeni, deci va fi diferită de 0. ....2p

b)  $f(1) + f(2) + \dots + f(2015) = \sum_{k=1}^{2015} f(k) = \sum_{k=1}^{2015} (k^2 + k) \dots\dots\dots 2p$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2015) = \frac{2015 \cdot 2016 \cdot 2017}{3} \dots\dots\dots 1p$$

3. Fie triunghiul  $ABC$  cu  $M \in (AB)$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$  și  $N \in (AC)$  astfel încât  $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ . Notăm cu  $P$  mijlocul segmentului  $(BC)$  și cu  $R$  punctul de intersecție al dreptelor  $AP$  și  $MN$ . Dacă  $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AP}$ , atunci determinați valoarea numărului real  $k$ .

**Soluție.**

$$(MP) \text{ linie mijlocie} \Rightarrow MP \parallel AN \Rightarrow \frac{MP}{AN} = \frac{PR}{AR} \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{PR}{AR} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{3AC}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AR} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AP} \Rightarrow k = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 4p$$

4. Considerăm șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a_k \neq a_p, \forall k, p \in \mathbb{N}, k \neq p$  și  $a_n + 1 = \frac{a_{n+1}(2a_n + 1 - a_{n+1})}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este progresie aritmetică.

Daniela Stănică

**Soluție.**

$$a_{n+1} \cdot (2a_n + 1 - a_{n+1}) = a_n \cdot (a_n + 1) \dots\dots\dots 1p$$

$$(a_n - a_{n+1})^2 + (a_n - a_{n+1}) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$(a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n - a_{n+1} + 1) = 0$  și cum  $a_n \neq a_{n+1} \Rightarrow a_n - a_{n+1} = -1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$  progresie aritmetică.  $\dots\dots\dots 3p$