

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profil tehnic**

Clasa a XII-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră grupul comutativ $G = (3, +\infty)$ în raport cu legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in G$

a) Să se arate că 4 este elementul neutru al legii de compoziție "o" pe mulțimea G.

b) Să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-3)^n + 3, \forall x \in G \text{ și } \forall n \in N, n \geq 2.$

Soluție.

a) scrie definiția elementului neutru.....1p

din $G = (3, +\infty)$ grup comutativ $\Rightarrow x \circ e = e \circ x, \forall x, e \in G$1p

din $x \circ e = x \Rightarrow (e-4)(x-3) = 0 \forall x \in G \Rightarrow e = 4$1p

b) $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3 \forall x, y \in G$1p

Demonstrează prin inducție matematică

Verifică $P(2): x \circ x = (x-3)^2 + 3$ (A).....1p

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (A)

G grup \Rightarrow legea e asociativă \Rightarrow

$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n+1} = x \circ \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n \right) = x \circ ((x-3)^n + 3) = (x-3)^{n+1} + 3 \Rightarrow P(n+1)$ (A).....2p

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0 \\ 2 + \sin x, & x > 0 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Determinați pe mulțimea numerelor reale primitiva F a funcției f care se anulează în 0.

Soluție.

a) $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 2 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$1p

f continuă pe $(-\infty, 0)$ (sumă de funcții continue)

f continuă pe $(0, +\infty)$ (sumă de funcții continue) $\Rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R}1p

f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe \mathbb{R}1p

b) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + c_1, & x \leq 0 \\ -\cos x + 2x + c_2, & x > 0 \end{cases}$1p

din continuitatea funcției $F \Rightarrow l_s(0) = l_d(0) = F(0) \Rightarrow c_2 = c_1 + 1 \dots\dots\dots 1p$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x, & x \leq 0 \\ -\cos x + 2x + 1, & x > 0 \end{cases} + k \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{din } F(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x, & x \leq 0 \\ -\cos x + 2x + 1, & x > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

3. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in G$.

b) Dacă (G, \cdot) este grup abelian, atunci determinați $b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2016) = X(b-1).$$

Soluție.

a) $A^2 = A \dots\dots\dots 1p$

$$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) \stackrel{Ds}{=} (I_2 + aA)I_2 + (I_2 + aA)bA \stackrel{Dd}{=} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{dar } A^2 = A \Rightarrow I_2 + (a+b+ab)A = X(a+b+ab) \dots\dots\dots 1p$$

b) $ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1 \dots\dots\dots 2p$

(G, \cdot) grup abelian are loc asociativitatea

$$\text{Demomstrează prin inducție } X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X((n+1)! - 1) \Rightarrow b = 2016! \dots\dots\dots 2p$$

4. Calculați $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^3}}{x} dx$, unde $x > 0$

Soluție.

$$\int x^{\frac{2}{3}-1} dx - 2 \int x^{\frac{3}{2}-1} dx = \dots\dots\dots 4p$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{3} x \sqrt{x} + C \dots\dots\dots 3p$$