

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A X-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1) + \log_3(x+2) = 2 \cdot \log_4(x+3)$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

$$\log_2(x+1) + \log_3(x+2) - \log_2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+2) + \log_2\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Fie } f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3(x+2) + \log_2\left(\frac{x+1}{x+3}\right) \dots\dots\dots 2p$$

Funcția f este strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă.2p

f injectivă și $f(1) = 0 \Rightarrow 1$ este soluția unică a ecuației date.2p

2. Demonstrați că $\sqrt{10^x - 4^x} + \sqrt{6^x - 4^x} \leq 15^{\frac{x}{2}}$, pentru orice număr real x pozitiv.

Costel Cerchez, Brăila

Soluție.

$$\sqrt{2^x \cdot (5^x - 2^x)} + \sqrt{2^x \cdot (3^x - 2^x)} \leq \sqrt{3^x \cdot 5^x}, (\forall) x > 0$$

$$\text{Fie } 5^x = a > 1, 3^x = b > 1, 2^x = c > 1 \Rightarrow a > c, b > c, c > 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Inegalitatea devine } \sqrt{c \cdot (a-c)} + \sqrt{c \cdot (b-c)} \leq \sqrt{a \cdot b} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin ridicare la pătrat se obține: } a \cdot c + b \cdot c - 2 \cdot c^2 + 2 \cdot c \cdot \sqrt{(a-c) \cdot (b-c)} \leq a \cdot b$$

$$2c \cdot \sqrt{(a-c) \cdot (b-c)} \leq (a-c) \cdot (b-c) + c^2 \Leftrightarrow$$

$$c^4 - 2c^2 \cdot (a-c) \cdot (b-c) + (a-c)^2 \cdot (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [c^2 - (a-c) \cdot (b-c)]^2 \geq 0 \dots\dots\dots 4p$$

Obs. Inegalitatea se obține și direct prin ridicare la pătrat.

3. În sistemul ortogonal de axe xOy se consideră triunghiul ABC cu $A(z_A), B(z_B), C(z_C) \in C(O, R)$ astfel încât $\frac{\overline{z_A}}{z_B} + \frac{\overline{z_B}}{z_C} + \frac{\overline{z_C}}{z_A} + 1 = 0$. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Gheorghe Alexe, Brăila

Soluție.

$$\text{Avem } z_A \cdot \overline{z_A} = z_B \cdot \overline{z_B} = z_C \cdot \overline{z_C} = R^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\overline{z_A}}{z_A} = \frac{R^2}{z_A}, \frac{\overline{z_B}}{z_B} = \frac{R^2}{z_B}, \frac{\overline{z_C}}{z_C} = \frac{R^2}{z_C} \Rightarrow \frac{R^2}{z_A \cdot z_B} + \frac{R^2}{z_B \cdot z_C} + \frac{R^2}{z_C \cdot z_A} + 1 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$R^2 \cdot (z_A + z_B + z_C) + z_A \cdot z_B \cdot z_C = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin conjugarea relației din ipoteză obținem: } \frac{z_A \cdot z_B}{R^2} + \frac{z_B \cdot z_C}{R^2} + \frac{z_C \cdot z_A}{R^2} + 1 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$z_A \cdot z_B + z_B \cdot z_C + z_C \cdot z_A + R^2 = 0 \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

Eliminând R^2 între relațiile (1) și (2) obținem:

$$-(z_A + z_B + z_C) \cdot (z_A \cdot z_B + z_B \cdot z_C + z_C \cdot z_A) + z_A \cdot z_B \cdot z_C = 0 \Rightarrow$$

$$z_A \cdot z_B \cdot (z_A + z_B) + z_B \cdot z_C \cdot (z_B + z_C) + z_A \cdot z_C \cdot (z_A + z_C) + 2 \cdot z_A \cdot z_B \cdot z_C = 0 \Rightarrow$$

$$(z_A + z_B) \cdot (z_B + z_C) \cdot (z_A + z_C) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$1) \ z_A + z_B = 0 \Rightarrow z_B = -z_A \Rightarrow [AB] \text{ diametru} \Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ$$

$$2) \ z_B + z_C = 0 \Rightarrow z_C = -z_B \Rightarrow [BC] \text{ diametru} \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$3) \ z_C + z_A = 0 \Rightarrow z_A = -z_C \Rightarrow [AC] \text{ diametru} \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$$

4. Arătați că $\frac{3x+4y}{x^2+y^2} + \frac{3y+4z}{y^2+z^2} + \frac{3z+4x}{z^2+x^2} \leq \frac{7}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, pentru orice $x, y, z \in (0, +\infty)$.

George Florin Șerban, G.M.

Soluție.

$$0 \leq (a-b)^2 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{3x+4y}{x^2+y^2} \leq \frac{3x+4y}{2xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{y} + \frac{4}{x} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{3y+4z}{y^2+z^2} \leq \frac{3y+4z}{2yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{z} + \frac{4}{y} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{3z+4x}{z^2+x^2} \leq \frac{3z+4x}{2zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{z} \right) \dots\dots\dots 1p$$

Prin adunarea celor trei inegalități obținem:

$$\frac{3x+4y}{x^2+y^2} + \frac{3y+4z}{y^2+z^2} + \frac{3z+4x}{z^2+x^2} \leq \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \dots\dots\dots 2p$$